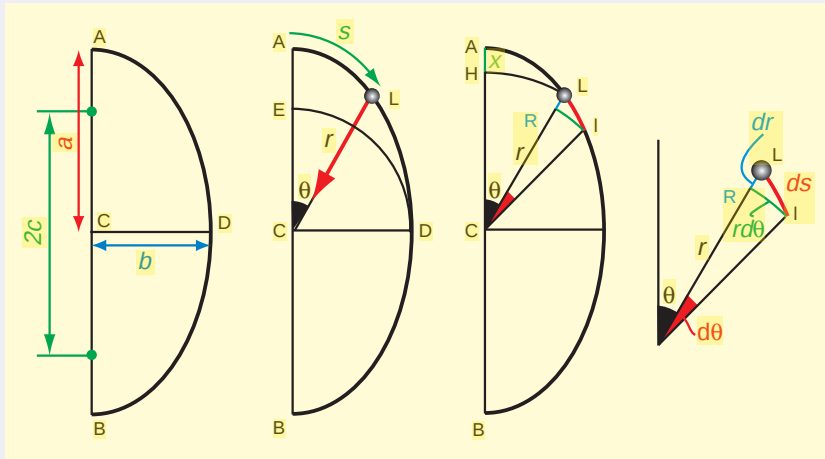


L'algorithme de la cinématique

Varignon calcule la force centrale y dans le cas où un corps décrit une ellipse, le centre de force étant confondu avec le centre de l'ellipse, cas qu'Isaac Newton examinait dans la proposition 10, problème 5, livre I de ses *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*.

Varignon détermine d'abord la longueur ds d'un petit arc. Nous transcrivons ici son raisonnement et sa figure en termes modernes. Il considère une ellipse ABD de centre C, de grand axe $AB=2a$. Il définit le petit axe $CD=b$ et la distance $2c$ qui sépare les foyers. Puis il nomme p le paramètre de l'ellipse et lui donne implicitement la valeur $2b^2/a$.



La première étape du calcul est la détermination de $ds=LI$. L'abscisse curviligne s est égale à AL . Soit H le point de l'axe AC , à la distance $r=CL$ de C .

L'équation de l'ellipse est : $r^2 = b^2/(1 - e^2 \cos^2 \theta)$, où e est l'excentricité de l'ellipse, égale à c/a et θ l'angle ACL . Cette équation s'écrit également : $b^2/r^2 = 1 - e^2 \cos^2 \theta$, qui donne, par différentiation, $-(b^2/r^3)dr = e^2 \cos \theta \sin \theta d\theta$. Or, d'après l'équation de l'ellipse $\cos^2 \theta = (r^2 - b^2)/e^2 r^2$. On en déduit, d'une part, $\cos \theta$ et, d'autre part, la valeur de $\sin^2 \theta = 1 - (r^2 - b^2)/e^2 r^2$.

Nous obtenons par substitution en prenant les valeurs positives de $\cos \theta$ et de $\sin \theta$: $-(b^2/r)dr = \sqrt{(r^2 - b^2)(e^2 r^2 - r^2 + b^2)}d\theta$. Par ailleurs : $dz = rd\theta = RI$.

En conséquence : $dz = -b^2 dr / \sqrt{(r^2 - b^2)(e^2 r^2 - r^2 + b^2)}$.

Il ne reste plus qu'à exprimer ce résultat en fonction du paramètre $p (= 2b^2/a)$ et non plus de b et de e : $dz = -a^2 p dr / \sqrt{(2ar^2 - a^2 p)(a^2 p - pr^2)}$.

Nous pouvons maintenant obtenir une expression différentielle caractéristique d'un petit arc de trajectoire : $dz^2 = dr^2 + rd\theta^2$:

$$dz^2 = [(2a^3 pr^2 - 2apr^4 + a^2 p^2 r^2) / \{(2ar^2 - a^2 p)(a^2 p - pr^2)\}] dr^2.$$

Calcul de la force centrale y

Il s'agit maintenant, par l'intermédiaire de simples manipulations algébriques-différentielles, de faire apparaître l'expression générale de la force centrale y dans la mesure où le mouvement est assujéti à la loi des aires.

Nous avons : $ds^2/dt^2 = 2a^2 r^2 - 2r^4 + apr^2/a^3 p$.

Soit, également : $2a^2 - 2r^2 + ap/a^3 p = ds^2/r^2 dt^2$.

Or, d'après la loi des aires, «on aura partout ici suivant M. Newton (Phil. Nat. Princ. Math. lib. I, sect. 2, th. 1) les dt comme les rdz , ou $dt = rdz$ ».

En conséquence, l'expression précédente peut s'écrire :

$$ds^2/dt^2 = 2a^2 - 2r^2 + ap/a^3 p.$$

Varignon différencie alors les deux expressions en considérant dt comme une constante : $2dsd(ds)/dt^2 = -4rdr/a^3 p$, mais $dr = -dx$, d'où $4r/a^3 p = 2dsd(ds)/dx dt^2$. Il fait ainsi apparaître, à l'issue de son calcul, et seulement d'un calcul, l'expression générale, trouvée précédemment, de la force centrale y , d'où $y = 4r/a^3 p$. Celle-ci est donc bien comme la distance $CL(r)$ du centre C de l'ellipse «au corps L qui la décrit».

Varignon déduit alors de ce résultat ceux qui concernent la parabole et l'hyperbole.

déduire l'une de l'autre par le jeu de simples procédures bien réglées de différentiation et d'intégration. La science du mouvement devient algorithmique.

L'œuvre de Varignon est trop souvent oubliée ou, au mieux, limitée à ses contributions à la statique (le polygone de Varignon permet, notamment, de décrire les forces qui s'exercent dans des systèmes mécaniques à l'équilibre). Ce manque d'intérêt pour la plus grande partie de l'œuvre de Varignon s'explique simplement par le fait que la plupart des historiens de la mécanique classique ne voyaient, dans les mathématiques, qu'un instrument ou qu'un outil au service de la science, et privilégiaient l'analyse historique des concepts ou des principes de la mécanique ; ce faisant, ils négligèrent de penser la science du mouvement en tant que physique mathématique, c'est-à-dire qu'ils négligèrent le plus souvent de reconnaître son plein effet à l'action proprement mathématique de la physique mathématique dans la coordination, la cohérence et la genèse conceptuelle.

Or c'est précisément sur ce terrain que se situe l'effort de Varignon. À cet égard, n'est-il pas remarquable de constater que, si ses formules et règles générales résument et rassemblent bien divers résultats, elles sont aussi et surtout des points de départ pour de nouvelles investigations ? Avec Varignon, la physique mathématique, qui avait reçu son impulsion de Galilée, de Christiaan Huygens (1629-1695) et de Newton, prend plus nettement conscience de sa valeur inductive spécifique.

En ce sens, on peut dire que l'œuvre de Varignon, caractérisée par son nouveau style analytique orienté vers l'obtention d'ensembles de lois ou de règles régies par des procédures algorithmiques, style qui culminera, en 1788, avec la mécanique analytique de Joseph Louis Lagrange, aura finalement ouvert la voie à ce qui sera la physique mathématique des XVIII^e et XIX^e siècles.

Michel BLAY est directeur de recherche au CNRS et directeur adjoint chargé de la recherche à l'École normale supérieure Lettres et Sciences humaines.

M. BLAY, *La Naissance de la mécanique analytique*, Presses universitaires de France, 1992.

M. BLAY, *Les Principia de Newton*, Presses universitaires de France, 1995.