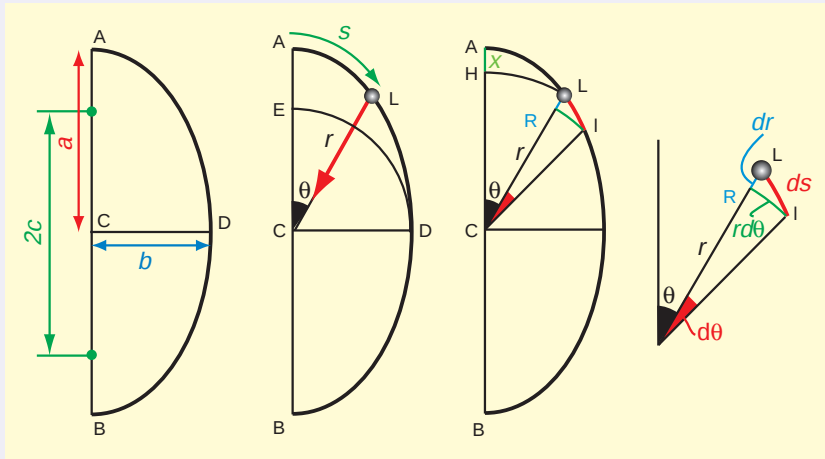


L'algorithme de la cinématique

Varignon calcule la force centrale y dans le cas où un corps décrit une ellipse, le centre de force étant confondu avec le centre de l'ellipse, cas qu'Isaac Newton examinait dans la proposition 10, problème 5, livre I de ses *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*.

Varignon détermine d'abord la longueur ds d'un petit arc. Nous transcrivons ici son raisonnement et sa figure en termes modernes. Il considère une ellipse ABD de centre C, de grand axe $AB=2a$. Il définit le petit axe $CD=b$ et la distance $2c$ qui sépare les foyers. Puis il nomme p le paramètre de l'ellipse et lui donne implicitement la valeur $2b^2/a$.



La première étape du calcul est la détermination de $ds=LI$. L'abscisse curviligne s est égale à AL . Soit H le point de l'axe AC , à la distance $r=CL$ de C .

L'équation de l'ellipse est : $r^2 = b^2/(1 - e^2 \cos^2 \theta)$, où e est l'excentricité de l'ellipse, égale à c/a et θ l'angle ACL . Cette équation s'écrit également : $b^2/r^2 = 1 - e^2 \cos^2 \theta$, qui donne, par différentiation, $-(b^2/r^3)dr = e^2 \cos \theta \sin \theta d\theta$. Or, d'après l'équation de l'ellipse $\cos^2 \theta = (r^2 - b^2)/e^2 r^2$. On en déduit, d'une part, $\cos \theta$ et, d'autre part, la valeur de $\sin^2 \theta = 1 - (r^2 - b^2)/e^2 r^2$.

Nous obtenons par substitution en prenant les valeurs positives de $\cos \theta$ et de $\sin \theta$: $-(b^2/r)dr = \sqrt{(r^2 - b^2)(e^2 r^2 - r^2 + b^2)}d\theta$. Par ailleurs : $dz = r d\theta = RI$.

En conséquence : $dz = -b^2 dr / \sqrt{(r^2 - b^2)(e^2 r^2 - r^2 + b^2)}$.

Il ne reste plus qu'à exprimer ce résultat en fonction du paramètre $p (= 2b^2/a)$ et non plus de b et de e : $dz = -a^2 p dr / \sqrt{(2ar^2 - a^2 p)(a^2 p - pr^2)}$.

Nous pouvons maintenant obtenir une expression différentielle caractéristique d'un petit arc de trajectoire : $dz^2 = dr^2 + r d\theta^2$:

$$dz^2 = [(2a^3 pr^2 - 2apr^4 + a^2 p^2 r^2) / \{(2ar^2 - a^2 p)(a^2 p - pr^2)\}] dr^2.$$

Calcul de la force centrale y

Il s'agit maintenant, par l'intermédiaire de simples manipulations algébrique-différentielles, de faire apparaître l'expression générale de la force centrale y dans la mesure où le mouvement est assujéti à la loi des aires.

Nous avons : $ds^2/dz^2 = 2a^2 r^2 - 2r^4 + apr^2/a^3 p$.

Soit, également : $2a^2 - 2r^2 + ap/a^3 p = ds^2/r^2 dz^2$.

Or, d'après la loi des aires, «on aura partout ici suivant M. Newton (Phil. Nat. Princ. Math. lib. I, sect. 2, th. 1) les dt comme les rdz , ou $dt = rdz$ ».

En conséquence, l'expression précédente peut s'écrire :

$$ds^2/dt^2 = 2a^2 - 2r^2 + ap/a^3 p.$$

Varignon différencie alors les deux expressions en considérant dt comme une constante : $2dsd(ds)/dt^2 = -4rdr/a^3 p$, mais $dr = -dx$, d'où $4r/a^3 p = 2dsd(ds)/dx dt^2$. Il fait ainsi apparaître, à l'issue de son calcul, et seulement d'un calcul, l'expression générale, trouvée précédemment, de la force centrale y , d'où $y = 4r/a^3 p$. Celle-ci est donc bien comme la distance $CL(r)$ du centre C de l'ellipse «au corps L qui la décrit».

Varignon déduit alors de ce résultat ceux qui concernent la parabole et l'hyperbole.

déduire l'une de l'autre par le jeu de simples procédures bien réglées de différentiation et d'intégration. La science du mouvement devient algorithmique.

L'œuvre de Varignon est trop souvent oubliée ou, au mieux, limitée à ses contributions à la statique (le polygone de Varignon permet, notamment, de décrire les forces qui s'exercent dans des systèmes mécaniques à l'équilibre). Ce manque d'intérêt pour la plus grande partie de l'œuvre de Varignon s'explique simplement par le fait que la plupart des historiens de la mécanique classique ne voyaient, dans les mathématiques, qu'un instrument ou qu'un outil au service de la science, et privilégiaient l'analyse historique des concepts ou des principes de la mécanique ; ce faisant, ils négligèrent de penser la science du mouvement en tant que physique mathématique, c'est-à-dire qu'ils négligèrent le plus souvent de reconnaître son plein effet à l'action proprement mathématique de la physique mathématique dans la coordination, la cohérence et la genèse conceptuelle.

Or c'est précisément sur ce terrain que se situe l'effort de Varignon. À cet égard, n'est-il pas remarquable de constater que, si ses formules et règles générales résument et rassemblent bien divers résultats, elles sont aussi et surtout des points de départ pour de nouvelles investigations ? Avec Varignon, la physique mathématique, qui avait reçu son impulsion de Galilée, de Christiaan Huygens (1629-1695) et de Newton, prend plus nettement conscience de sa valeur inductive spécifique.

En ce sens, on peut dire que l'œuvre de Varignon, caractérisée par son nouveau style analytique orienté vers l'obtention d'ensembles de lois ou de règles régies par des procédures algorithmiques, style qui culminera, en 1788, avec la mécanique analytique de Joseph Louis Lagrange, aura finalement ouvert la voie à ce qui sera la physique mathématique des XVIII^e et XIX^e siècles.

Michel BLAY est directeur de recherche au CNRS et directeur adjoint chargé de la recherche à l'École normale supérieure Lettres et Sciences humaines.

M. BLAY, *La Naissance de la mécanique analytique*, Presses universitaires de France, 1992.

M. BLAY, *Les Principia de Newton*, Presses universitaires de France, 1995.

Histoire d'infini

MARIA REMÉNYI

Pendant 2 000 ans, le concept d'infini gêna les mathématiciens. John Wallis posa le symbole ∞ , les libérant ainsi des discussions philosophiques.



En Europe, au XVII^e siècle, est né le calcul différentiel et son astucieux formalisme autorisant la manipulation des quantités infinitésimales. L'inverse de l'infiniment petit étant l'infiniment grand, il fallait que le même siècle voie l'apparition du symbole ∞ . C'est le mathématicien britannique John Wallis (1616–1703) qui, le premier, abrégea le concept «infini» par ce symbole. John Wallis a largement contribué au développement des mathématiques de son époque, tant dans leur contenu que dans leur forme.

Les sciences en avaient bien besoin de ce progrès conceptuel pour progresser. Dans le signe inventé par Wallis, la polémique sur le sens à donner au mot «infini» durerait peut-être encore. En fait, mathématiciens, philosophes et théologiens polémiquaient depuis deux mille ans. Une situation qui n'avait pas que des inconvénients. Ainsi, la littérature mathématique des siècles passés était, du moins de prime abord, plus accessible que de nos jours ; ses auteurs se servaient de la langue écrite usuelle pour la description des objets et des relations mathématiques. Le langage moderne des formules, qui, pour de nombreux profanes, **représente** un obstacle insurmontable, et contribue de ce fait à l'impopularité générale de la discipline mathématique, n'est pas dû à quelque nécessité alchimique de conservation des secrets mathématiques. L'histoire des sciences montre

que le désir de résoudre des problèmes concrets favorise l'introduction de symboles et d'abréviations, afin de mieux formuler les hypothèses et les démonstrations et d'obtenir des conclusions précises.

L'une des difficultés consistait à découvrir tout ce que cache le mot infini. Aristote (–384 à –322) fit les premiers progrès. Le mot *apeiron* qu'utilisait le philosophe grec Aristote se caractérisait déjà, à l'époque présocratique, par des sens multiples. Il signifiait sans limite, indéfini, inconcevablement grand, mais désignait également, avec une connotation négative, le chaos duquel est né le monde. Ce n'est qu'au début de notre ère que «l'infini» fut identifié à l'«Un» divin. Pour Aristote, le mot infini était associé à l'expression de l'imperfection.

La précision qu'Aristote apporta à l'emploi de ce mot distinguant, entre infini actuel et infini potentiel, fut d'une importance décisive pour toutes les discussions mathématiques futures. Un processus qui poursuit sans fin, comme par exemple la production de nombres naturels par la consigne «toujours poursuivre la numération», n'est que potentiellement infini, car à chaque stade du processus il n'existe qu'un nombre fini d'objets. À l'inverse, un ensemble de taille infinie qui existe une fois pour toutes, correspond à un infini actuel.

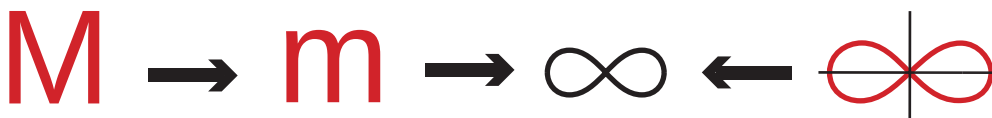
Notons que la mathématique grecque utilisait des méthodes infinitésimales cachées (méthode d'exhaus-

tion) pour le calcul des longueurs des courbes ou des surfaces délimitées par des lignes courbes, mais l'infini n'apparaissait pas en tant que terme mathématique. Euclide, par exemple, ne dit pas : «il existe une quantité infinie de nombres premiers», mais «il existe une quantité de nombres premiers supérieure à toute quantité donnée».

Réflexion métaphysique

Au Moyen Âge, ère obscure pour les sciences, les réflexions sur la nature de l'infini étaient essentiellement métaphysiques. Certaines peuvent toutefois être interprétées comme la préparation des considérations mathématiques du calcul infinitésimal au XVII^e siècle. C'est le cas des réflexions sur l'infini actuel et potentiel du théologien allemand Nicolas de Cues (1401–1464). Johannes Kepler (1571–1630) s'en inspira, par exemple, lorsqu'il abandonna les méthodes antiques pour le calcul des surfaces.

Francesco Bonaventura Cavalieri (1598–1647), au XVII^e siècle, fut le premier à adopter une position considérée comme moderne sur l'infini, à savoir que des lois différentes gouvernent les grandeurs infinies et les grandeurs finies. Dans sa méthode des indivisibles, il se préoccupa moins de spéculations philosophiques que de trouver une façon de résoudre son problème. Pour y arriver, il contourna astucieusement les difficultés qui se



1. Le signe infini aurait été créé au XVII^e siècle par le mathématicien britannique John Wallis à partir d'une version cursive du m latin (ou M),

c'est-à-dire de 1 000 en chiffres romains. Peut-être a-t-il aussi pensé à la courbe de même forme (lemniscate), qui se parcourt sans fin?