

Histoire d'infini

MARIA REMÉNYI

Pendant 2 000 ans, le concept d'infini gêna les mathématiciens. John Wallis posa le symbole ∞ , les libérant ainsi des discussions philosophiques.



En Europe, au XVII^e siècle, est né le calcul différentiel et son astucieux formalisme autorisant la manipulation des quantités infinitésimales. L'inverse de l'infiniment petit étant l'infiniment grand, il fallait que le même siècle voie l'apparition du symbole ∞ . C'est le mathématicien britannique John Wallis (1616–1703) qui, le premier, abrégea le concept «infini» par ce symbole. John Wallis a largement contribué au développement des mathématiques de son époque, tant dans leur contenu que dans leur forme.

Les sciences en avaient bien besoin de ce progrès conceptuel pour progresser. Dans le signe inventé par Wallis, la polémique sur le sens à donner au mot «infini» durerait peut-être encore. En fait, mathématiciens, philosophes et théologiens polémiquaient depuis deux mille ans. Une situation qui n'avait pas que des inconvénients. Ainsi, la littérature mathématique des siècles passés était, du moins de prime abord, plus accessible que de nos jours ; ses auteurs se servaient de la langue écrite usuelle pour la description des objets et des relations mathématiques. Le langage moderne des formules, qui, pour de nombreux profanes, représente un obstacle insurmontable, et contribue de ce fait à l'impopularité générale de la discipline mathématique, n'est pas dû à quelque nécessité alchimique de conservation des secrets mathématiques. L'histoire des sciences montre

que le désir de résoudre des problèmes concrets favorise l'introduction de symboles et d'abréviations, afin de mieux formuler les hypothèses et les démonstrations et d'obtenir des conclusions précises.

L'une des difficultés consistait à découvrir tout ce que cache le mot infini. Aristote (–384 à –322) fit les premiers progrès. Le mot *apeiron* qu'utilisait le philosophe grec Aristote se caractérisait déjà, à l'époque présocratique, par des sens multiples. Il signifiait sans limite, indéfini, inconcevablement grand, mais désignait également, avec une connotation négative, le chaos duquel est né le monde. Ce n'est qu'au début de notre ère que «l'infini» fut identifié à l'«Un» divin. Pour Aristote, le mot infini était associé à l'expression de l'imperfection.

La précision qu'Aristote apporta à l'emploi de ce mot distinguant, entre infini actuel et infini potentiel, fut d'une importance décisive pour toutes les discussions mathématiques futures. Un processus qui poursuit sans fin, comme par exemple la production de nombres naturels par la consigne «toujours poursuivre la numération», n'est que potentiellement infini, car à chaque stade du processus il n'existe qu'un nombre fini d'objets. À l'inverse, un ensemble de taille infinie qui existe une fois pour toutes, correspond à un infini actuel.

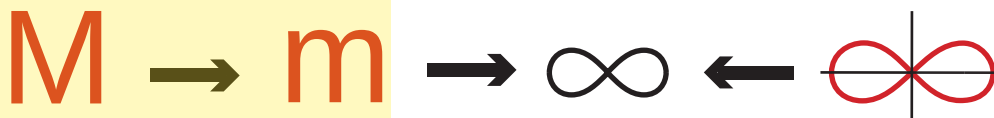
Notons que la mathématique grecque utilisait des méthodes infinitésimales cachées (méthode d'exhaus-

tion) pour le calcul des longueurs des courbes ou des surfaces délimitées par des lignes courbes, mais l'infini n'apparaissait pas en tant que terme mathématique. Euclide, par exemple, ne dit pas : «il existe une quantité infinie de nombres premiers», mais «il existe une quantité de nombres premiers supérieure à toute quantité donnée».

Réflexion métaphysique

Au Moyen Âge, ère obscure pour les sciences, les réflexions sur la nature de l'infini étaient essentiellement métaphysiques. Certaines peuvent toutefois être interprétées comme la préparation des considérations mathématiques du calcul infinitésimal au XVII^e siècle. C'est le cas des réflexions sur l'infini actuel et potentiel du théologien allemand Nicolas de Cues (1401–1464). Johannes Kepler (1571–1630) s'en inspira, par exemple, lorsqu'il abandonna les méthodes antiques pour le calcul des surfaces.

Francesco Bonaventura Cavalieri (1598–1647), au XVII^e siècle, fut le premier à adopter une position considérée comme moderne sur l'infini, à savoir que des lois différentes gouvernent les grandeurs infinies et les grandeurs finies. Dans sa méthode des indivisibles, il se préoccupa moins de spéculations philosophiques que de trouver une façon de résoudre son problème. Pour y arriver, il contourna astucieusement les difficultés qui se



1. Le signe infini aurait été créé au XVII^e siècle par le mathématicien britannique John Wallis à partir d'une version cursive du m latin (ou M),

c'est-à-dire de 1 000 en chiffres romains. Peut-être a-t-il aussi pensé à la courbe de même forme (lemniscate), qui se parcourt sans fin?

présentaient lors du calcul de la somme d'un nombre infini de grandeurs.

Entre autres contributions, John Wallis poursuivit le développement des méthodes de Cavalieri. Après ses études supérieures, qui ne furent nullement marquées par une intense activité mathématique, il fut ordonné prêtre à Londres. Pendant cette période, il participa aux préparatifs de la fondation de la *Royal Society*. En 1643, il s'était illustré durant la guerre civile qui opposait royalistes et parlementaires, en décryptant très brillamment des informations secrètes. Lorsque Wallis fut nommé en 1649 professeur de géométrie à Oxford, ce n'était pas en raison de ses performances mathématiques, c'était probablement avant tout le résultat de ses activités politiques.

Cependant, l'estime dans laquelle Wallis était tenu dans le monde scientifique était méritée : il est aujourd'hui considéré comme l'un de ceux qui ont ouvert la voie au calcul infinitésimal et comme le précurseur le plus éminent de Newton, qui fut influencé par l'ouvrage majeur de Wallis, *Arithmetica Infinitorum* (1656). Auparavant, ses travaux avaient porté sur les sections coniques (*De sectionibus conicis*, 1655), où il délaissa l'approche purement géométrique de la mathématique grecque pour considérer les sections coniques comme des courbes lisses, dont il établit les équations algébriques. Il déduisit de ces équations les propriétés des sections coniques sans faire appel à des arguments géométriques, mais uniquement par le calcul. Il participa ainsi à un développement essentiel de l'histoire des mathématiques : l'algébrisation de la géométrie.

Dès le début de ces travaux, Wallis proposa une modification de la méthode des indivisibles de Cavalieri. Alors que Cavalieri divisait les surfaces en un nombre infini de segments, Wallis les décomposait en un nombre infini de parallélogrammes de même taille, cette taille étant «une fraction infiniment petite, égale à $1/\infty$ de la surface totale et le symbole ∞ désignant l'infini».

De M au signe infini

Pourquoi choisit-il cette représentation ? On ne peut bien sûr apporter à cette question qu'une réponse spéculative. Bien avant le début de ses activités mathématiques, Wallis s'était fait un nom en tant que philologue ; il savait probablement que le symbole ∞ désignait une ligature latine de m apparue

au VII^e siècle, c'est-à-dire une écriture cursive utilisée pour signifier 1 000 en chiffre romain, donc un «très grand» nombre. Un contemporain de Wallis, le mathématicien et philosophe hollandais Bernhard Nieuwentijt, utilise pour sa part le signe «m» dans son *Analysis infinitorum* de 1695. Le signe m, un symbole proche du futur ∞ , y désigne l'infini. Sans doute Wallis a-t-il aussi pensé que la boucle que représente le symbole ∞ faisait penser à l'infini, puisqu'elle peut être parcourue sans fin.

L'apparition du symbole ∞ contribua en tout cas fortement à la modernisation en marche des mathématiques. Au tournant du XVIII^e siècle, Isaac Newton (1643–1727) et Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) organisèrent les connaissances éparses sur le calcul différentiel et intégral en une véritable théorie. Tout était prêt pour que le symbole soit de plus en plus utilisé. Au début du XVIII^e siècle, il apparut de plus en plus fréquemment dans la littérature mathématique et philosophique ; il était souvent lié au concept de l'infiniment petit, car la signification et l'admissibilité de cette notion dans le calcul infinitésimal alors en cours de développement posaient un problème tant mathématique que philosophique. Avec les travaux de Léonard Euler (1707–1783), le signe ∞ devint, dans la seconde moitié du XVIII^e siècle, un élément permanent du langage symbolique mathématique. Euler, contrairement à Newton et à Leibniz, rejetait complètement les légitimations métaphysiques des grandeurs infiniment petites et adoptait enfin un point de vue strictement formel.

La théorie des grandeurs infinitésimales, dont les bases restaient vacillantes, fut largement améliorée au cours du XIX^e siècle grâce à l'introduction du processus de passage à la limite, et des notions de continuité et de convergence. Une théorie du calcul différentiel et infinitésimal rigoureuse et qui répondait aux exigences formelles et logiques des mathématiques apparaissait enfin.

Au XIX^e siècle, le symbole ∞ servait surtout, comme aujourd'hui d'ailleurs, à décrire les processus de passage à la limite, notamment pour les séries et les suites. Il décrivait, au sens d'Aristote, un infini potentiel. Toutefois, Georg Cantor (1845–1918), le fondateur de la théorie des ensembles, et par conséquent de la théorie moderne de l'infini, préféra différencier par des symboles différents les deux types d'infini. Il dési-



2. Le Britannique John Wallis contribua à l'algébrisation de la géométrie. Il écrivit, le premier, le signe ∞ pour décrire des parallélogrammes infiniment petits.



3. Le signe ∞ fut vite employé en dehors des mathématiques pour symboliser l'infini. Ici une carte d'un ancien jeu de tarots.

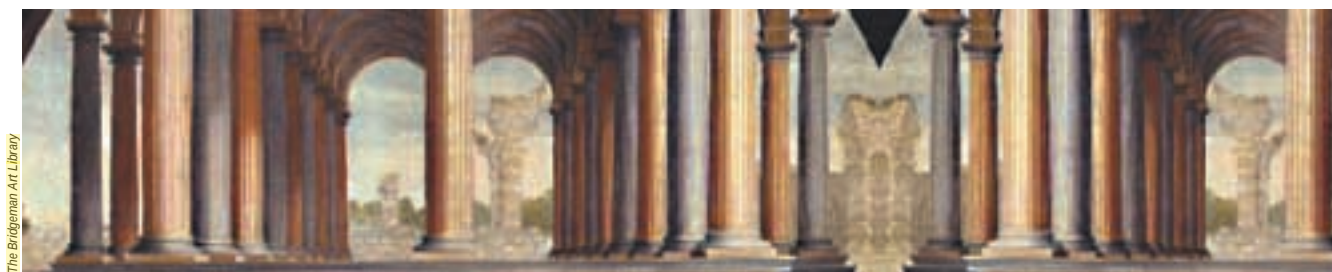
gna le premier nombre transfini (infini actuel) par la lettre hébraïque *aleph*. L'emploi de ce nouveau signe pour signifier l'infini ne paraît arbitraire qu'au premier abord, car, dès les années 1700, le symbole ∞ fut aussi employé en dehors des mathématiques et de la philosophie, afin de symboliser l'infinité ou l'éternité. Il fit, par exemple, son apparition sur la carte de tarot, appelée le menteur ou le mage. Or, le symbole kabbalistique qui fut associé à cette carte est la lettre hébraïque *aleph*.

Maria REMÉNYI, journaliste, est historienne des sciences.

De la perspective à l'infini géométrique

JEAN-PIERRE LE GOFF

Au XVII^e siècle, grâce à la géométrie projective, née de l'union de la théorie de la perspective et de la théorie des coniques, l'infini géométrique acquiert une «dimension» humaine, une évidence perceptible. L'infini potentiel des philosophes devient l'infini actuel des géomètres.



Pour les philosophes et pour les géomètres de la Grèce antique, l'infini n'a pas de véritable existence. Il est considéré comme «potentiel», accessible en puissance. Ainsi, Aristote impose une vision géocentrique et «finiste» du cosmos, limité par la sphère des fixes, sorte de voûte céleste qui porte les étoiles et marque les confins du monde avec le néant extérieur. Dans ce contexte, la géométrie euclidienne reconnaît et intègre l'infini potentiel, mais s'arrête aux rives de l'infini «actuel». L'infini inspire alors aux géomètres grecs méfiance et circonspection, car son usage immodéré ou inattentif conduit à des contradictions.

Un objet élémentaire tiré de la géométrie d'Euclide, une «ligne droite», illustre ces contradictions. Euclide la définit comme l'extension la plus «économique» d'un point à un autre. Aussi, une telle ligne s'apparente plutôt à notre moderne «segment» qu'à ce qu'un mathématicien d'aujourd'hui nomme une droite – à ceci près que, pour Euclide et ses successeurs, jusqu'au XVII^e siècle, cette «ligne» est prolongeable autant que nécessaire pour les besoins d'une construction ou d'une démonstration (dans une figure où il est nécessaire de

déterminer le point de concours de deux droites non parallèles, par exemple). De même, une «surface plane» est en fait une figure plane limitée par un contour fermé : un segment de parabole, par exemple, est limité par la courbe et par l'une de ses cordes. Il en est de même d'un corps ou d'un solide, volume fini limité par une ou par plusieurs surfaces. Ainsi la ligne droite, le plan ou le solide des géomètres strictement euclidiens sont finis, mais prolongeables à volonté, et non des supports rectilignes, plans ou volumiques d'un espace conçu d'emblée comme infiniment étendu.

Du fini prolongeable à l'infini

Depuis cette époque, on débat du statut de ce qu'on nomme le cinquième postulat d'Euclide, au premier Livre de ses *Éléments*. Ce postulat – une proposition non démontrée – énonce en substance que, si une sécante rencontre deux autres droites en faisant des angles internes situés d'un même côté de la sécante tels que leur somme soit inférieure à deux angles droits, les deux droites, prolongées indéfiniment (c'est-à-dire autant que nécessaire) se

rencontrent du côté où se trouvent les angles de somme inférieure à deux angles droits. Un équivalent moderne de ce postulat consiste à dire que, par un point hors d'une droite, il passe une parallèle à cette droite et une seule. Les géomètres ont soulevé la question suivante : ne pouvait-on pas démontrer le cinquième postulat à partir des autres postulats et propositions des *Éléments*? Les premières tentatives de démonstration reposaient sur le prolongement indéfini des droites, c'est-à-dire leur prolongement potentiellement infini avec conservation de l'alignement.

On sait aujourd'hui que ces tentatives étaient vaines : le cinquième postulat d'Euclide ne peut être démontré. On sait aussi que cette aventure des parallèles a conduit à la création de trois types de géométries. L'une, dite euclidienne, admet ce postulat comme un axiome de la théorie. Les deux autres, dites non euclidiennes, ont été conçues à la fin du XIX^e siècle et posent comme axiome l'une des deux formes que peut prendre la négation du postulat des parallèles. La géométrie hyperbolique prend pour principe que par un point il passe plus d'une parallèle à une droite donnée (et, par voie de conséquence, on