

miroirs paraboliques, en passant par Descartes et sa classification algébrique des courbes du second degré.

Considérons les rayons visuels qui joignent un œil ponctuel aux points d'un cercle réel. Ces rayons forment un cône à base circulaire dont le sommet est l'œil. Toute coupe du cône par un plan produit une courbe qui est une perspective du cercle. Autrement dit, Desargues a pris conscience qu'une conique n'est jamais qu'un cercle, vu d'un bon point de vue.

Cela n'avait jamais été énoncé en ces termes auparavant. On concevait bien qu'une ellipse, courbe fermée, pouvait être l'image d'un cercle en perspective. Par exemple, Albrecht Dürer (1471-1528) a construit point par point des coupes d'un cône droit limité, dans les trois situations de coupe possibles (perpendiculaire à l'axe vertical, ce qui donne un cercle, parallèle à cet axe, ce qui donne une hyperbole, parallèle à une génératrice, et l'on obtient une parabole, et quelconque, ce qui donne une ellipse). Notons que son dessin d'ellipse a une forme ovoïde, comme s'il n'en croyait pas ses yeux, s'attendant plutôt à une courbe effilée près du sommet du cône plutôt qu'à une véritable ellipse. Pourtant, il paraissait inconcevable que l'on puisse assimiler au cercle des courbes non fermées, ayant des branches infinies, comme la parabole, ou présentant des ruptures de continuité, comme l'hyperbole à deux parties séparées, telle que nous la définissons aujourd'hui.

Kepler, dans son *Optique*, avait certes fait remarquer qu'une parabole n'est jamais qu'une ellipse dont l'un des foyers se serait éloigné à l'infini, la courbe ouvrant ses bras en quelque sorte, puis devenant une hyperbole lorsque cette ouverture se trouve limitée par deux droites asymptotes, dans le mouvement tournant que ferait un plan coupant un cône (illimité, mais à une nappe). Cette conception novatrice, réintégrant le mouvement dans la définition des courbes, a sans doute inspiré Desargues, mais le géomètre lyonnais est allé plus loin : il a dépassé l'infini potentiel de Kepler et a posé



3. UNE SCÈNE est délimitée, au XVI^e siècle par une «fenêtre» par laquelle on l'observe. Progressivement, les artistes s'en affranchissent et en jouent. Ici la fenêtre apparaît sous forme d'un cadre : Philippe de Champaigne peint Robert Arnauld d'Andilly avec une main négligemment posée sur le bord du cadre. Notons que Philippe de Champaigne demanda à Desargues de dessiner pour lui le schéma d'un décor plafonnant pour la voûte de l'ancienne église des carmélites : le Christ en croix, flanqué de la Vierge et de saint Jean, paraissait être sur un plan vertical (en contre-plongée), alors qu'il était peint sur un plan horizontal.

d'emblée le cône comme surface infinie à deux nappes.

Plus encore, en assimilant faisceaux de droites parallèles et faisceaux de droites concourantes, Desargues fut amené à concevoir qu'une droite n'est jamais qu'un cercle de rayon infini, c'est-à-dire dont le centre, une fois fixé l'un des points du cercle, s'en est éloigné indéfiniment. Et qu'un cylindre à base circulaire est un cône dont le sommet se trouve à l'infini – ce qui explique que les coupes d'un cylindre par un plan produisent aussi des coniques, en l'occurrence des ellipses ou des cercles.

Bassin circulaire, ellipse, parabole ou hyperbole

Pour mieux comprendre comment, dans le contexte de la perspective, les diverses coniques apparaissent comme des projections du cercle, imaginons une situation picturale banale : un peintre qui observe un bassin circulaire au travers de la «fenêtre» fictive où il souhaite le représenter, le tableau étant orthogonal au sol (voir la figure 6). On pourrait faire appa-

raître les diverses coniques en faisant varier l'inclinaison du tableau par rapport au sol. Modifications plutôt les positions relatives de l'œil, du tableau et du bassin.

Quand le bassin se situe au-delà de la fenêtre, son image est une ellipse ou un cercle, dans ce que l'on nomme, depuis Apollonios, le cas d'antiparallélisme. Rapprochons le bassin de l'observateur, de façon qu'une partie au moins du bassin se retrouve entre l'œil et le tableau ; la projection du bassin sur le plan du tableau – un plan supposé illimité – reste une courbe fermée (une ellipse) dont une partie n'apparaîtra pas dans le tableau, puisqu'elle est située sous la ligne de terre. Rapprochons encore le bassin de l'observateur, jusqu'au moment où celui-ci se retrouve debout sur son contour ; dans ce cas, le rayon visuel partant de l'œil et joignant son point d'aplomb est parallèle au tableau et ne le rencontrera jamais, ou plutôt à l'infini. Ce point du cercle ayant une

image à l'infini, l'image du bassin circulaire devient une parabole (géométriquement, cette situation correspond à un plan de coupe parallèle à une génératrice du cône).

Que se passe-t-il enfin quand l'observateur met les pieds dans l'eau, de sorte que le bassin s'étend aussi derrière lui ? Le «plan neutre» – le plan parallèle au tableau et passant par l'observateur – coupe alors le cercle en deux points A et B. L'image sur le plan du tableau de chacun de ces points étant à l'infini, la partie du bassin circulaire qui s'étend devant l'observateur produit une courbe-image possédant deux branches infinies, c'est-à-dire une hyperbole. Plus précisément, il s'agit d'une hyperbole telle que l'avait définie Apollonios, c'est-à-dire une seule des deux courbes séparées qui composent une hyperbole dans sa définition moderne. Quant à l'arc du bassin qui se trouve derrière l'observateur, celui-ci ne le voit pas, mais cela n'empêche pas le géomètre de concevoir sa projection sur le plan du tableau. Celle-ci est obtenue en prolongeant jusqu'au plan