



7. LES DÉCORS PLAFONNANTS, tel l'Oculus de la chambre des époux d'Andrea Mantegna (ci-dessus) ou les trompe-l'œil sur voûtes sont des représentations en perspective où l'artiste adopte un «point de vue» où il s'affranchit de la verticalité.

appelle une involution et auquel on préfère aujourd'hui le terme de birapport de quatre points) entre les segments définis par six points d'une droite reste inchangé par projection centrale ou par projection parallèlement à une direction donnée.

Les découvertes de Desargues ont rendue possible une théorie générale des projections, à laquelle s'emploieront les géomètres de la première moitié du XIX^e siècle, Gaspard Monge, Jean-Victor Poncelet et Michel Chasles, pour ne citer qu'eux. À son tour, la géométrie projective construite par ces mathématiciens conduira à entrevoir la possibilité des géométries non euclidiennes et à en concevoir des modèles euclidiens. On y rencontre aussi des représentations de l'infini. Par exemple, dans les modèles d'Henri Poincaré ou d'Eugenio Beltrami pour le «plan hyperbolique», l'infini est ramené à distance finie en assimilant les points à l'infini à un cercle ; l'intérieur de ce cercle constitue le «plan», et les «droites» de ce plan sont par définition des arcs circulaires orthogonaux au contour. Il s'agit d'un modèle euclidien d'une géométrie non euclidienne, puisque, par un point extérieur à une «droite», passent une infinité de «droites» parallèles à la droite en question. On notera que les extrémités des droites sont situées sur le contour, c'est-à-dire à l'infini : avec un tel modèle, le monde clos des Anciens fait en quelque sorte son retour...

La perspective cavalière

Les projections parallèles, projections où les rayons qui partent de l'objet à représenter sont parallèles à une direction donnée, semblent connues de longue date, au moins depuis l'architecte romain Vitruve (I^{er} siècle de notre ère) : beaucoup de dessins, qu'ils soient à vocation artistique ou technique, semblent relever de ce que l'on nomme aujourd'hui la perspective cavalière ou d'une projection orthogonale (projection dans une direction orthogonale au plan du dessin). En fait, il ne s'agit que de tentatives empiriques de représenter localement la profondeur pour des objets isolés. Ils ne peuvent en aucun cas relever d'une volonté de «représenter l'espace» de façon globale, cohérente et homogène. On ne peut véritablement parler de pers-

pective cavalière qu'à partir du moment où ses règles ont été codifiées géométriquement. Or celles-ci, bien que nettement plus simples que celles de la perspective centrale, n'ont été édictées qu'après celles de la perspective centrale du Quattrocento.

Les premiers dessins en perspective parallèle systématique apparaissent dans les théâtres de machines (des plans de machines) ou dans les ouvrages d'ingénieurs du XVI^e siècle, et les premiers traités de perspective cavalière ou militaire sont le fait de théoriciens français du début du XVII^e siècle. Quant aux architectes, qui ont donné la perspective centrale aux peintres, ils ne se sont saisis que tardivement, à partir de la fin du XIX^e siècle, de la perspective cavalière et de l'axonométrie (la représentation des trois dimensions par projection sur trois axes tracés dans le plan du dessin).

Dans les perspectives parallèles, on considère les rayons visuels parallèles. Comme l'a montré Desargues, on peut aussi dire que ces rayons visuels se rencontrent à l'infini. En d'autres termes, la perspective cavalière équivaut à une perspective centrale où l'œil du dessinateur est «rejeté à l'infini». En 1925, le peintre russe Lissitzky s'est exclamé : «Le suprématisme a fait reculer l'extrémité de la pointe de la pyramide visuelle à l'infini... [Ce faisant] il a inventé la dernière illusion : l'extensibilité infinie vers l'arrière-plan ou l'avant-plan.» Il lui semblait qu'on en avait fini avec la peinture du sujet renaissant, que le point de vue n'existait plus. Le peintre s'assimile alors au Créateur par le regard venu de l'infini. Il nous paraît pourtant que, dans une perspective parallèle, le point de vue est toujours présent, tout rejeté à l'infini qu'il soit et justement du fait qu'il est rejeté : une exclusion n'est pas une absence.

Jean-Pierre LE GOFF est professeur de mathématiques et d'histoire des mathématiques à l'IUFM (Institut universitaire de formation des maîtres) de Caen et à l'IREM (Institut de recherches sur l'enseignement des mathématiques) de Basse-Normandie (Université de Caen).

René TATON, *L'œuvre mathématique de Girard Desargues*, PUF, 1951 (réédition Vrin, 1988).

Philippe COMAR, *La perspective en jeu : Les dessous de l'image*, Éditions Gallimard/La Découverte, n° 138, 1992.

Jean-Pierre LE GOFF, *Desargues et la naissance de la géométrie projective*, in

Desargues en son temps, sous la direction de Jean Dhombres et Joël Sakarovich, Blanchard, 1994.

Jean-Pierre LE GOFF, *Piero della Francesca. De la perspective en peinture*, préface de Hubert Damisch et postface de Daniel Arasse, in *Medias Res*, 1998.

Les Cahiers de la perspective, sous la direction de Didier BESSOT et Jean-Pierre LE GOFF, IREM de Basse-Normandie, Université de Caen, 1981-1996.

D. BESSOT et J.-P. LE GOFF, *Mais où est donc passée la troisième dimension ?* in *Histoires de problèmes, histoire des mathématiques*, Éditions Ellipses, 1993.

L'ensemble triadique de Cantor

ANDRÉ DELEDICQ

Les préposés au nettoyage de la planète Ter découvrent un ensemble de Cantor qui remplit un segment de largeur 1, mais son complémentaire aussi...



Dans les écoles de Gullicantor, une province de Ter, l'éducation était stricte : le plus gros travail dévolu aux garçons était le nettoyage des barres de cuivre que les Gullicantoriens utilisaient comme décoration.

Les règles de nettoyage étaient strictes : il fallait, dans l'empire de Ter, d'abord nettoyer le tiers central de chaque barre, puis les tiers centraux de chaque tiers situés de part et d'autre du tiers que l'on venait de nettoyer, et ainsi de suite. Indéfiniment. Les mathématiciennes de Ter avaient montré que ce nettoyage de chaque barre ne prend qu'un temps fini si l'on suppose que la durée de nettoyage d'un segment ne dépend que de sa longueur.

Comment savoir si toute la barre, que l'on suppose de longueur 1, est bien nettoyée par ce processus, s'interrogeaient les jeunes Gullicantoriens ? À chaque promotion de jeunes garçons, les mathématiciennes de l'empire expliquaient que, le tiers central étant nettoyé ($1/3$), ils nettoyaient ensuite un tiers des deux tiers restants, soit $(1/3) \times (2/3)$, et ainsi de suite, ce qui faisait : $1/3 + 2/3 \times (1/3 + 2/3 \times (1/3 + 2/3 \times (1/3 + \dots)))$

La formule traduit effectivement le processus de nettoyage, s'extasiaient les jeunes garçons : un tiers, plus un tiers sur les deux tiers restants, plus encore un tiers sur les deux tiers restants, et ainsi de suite, soit, après simplification : $(1 + 2/3 + 4/9 + 8/27 + \dots) / 3$,

ce qui est la série géométrique de raison $2/3$ divisée par 3.

Nous savons, continuaient les garçons, que la somme : $1 + a + a^2 + \dots + a^n \dots$ vaut $1/(1 - a)$. Ici, a est égal à $2/3$ et la somme est égale à $1/(1 - 2/3)$, soit exactement 3. Comme cette somme est multipliée par $1/3$, cela fait 1 : à la fin, la barre tout entière serait nettoyée.

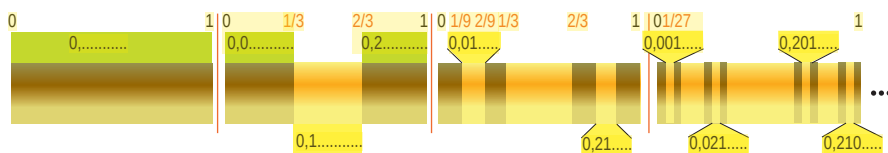
Hélas, des garçons de Ter n'avaient pas la bosse des maths, ce qui ennuyait les autorités. Celles-ci pensaient instituer un système de quotas pour les postes de mathématiciens à l'Université. Les mathématiciennes expliquaient le phénomène de nettoyage en tirant parti du fait que les habitants de Ter, leurs noms l'indique, n'ont que trois doigts. Les Terriens comptent ainsi en base trois et écrivent la suite des entiers : 0, 1, 2, 00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22... ; de même, les nombres fractionnaires, exprimés en base 3, ne comportent que des 0, des 1 et des 2.

Les points de la barre qui seront nettoyés sont ceux qui, à un moment quelconque du découpage en trois, ont un chiffre «1», comme on le voit sur la figure ci-dessous. Et les nombres dont l'écriture ne contient que des 0 et des 2 sont des abscisses de points de la barre qui resteront sales, par exemple 0,202020, 0,200200200 et bien d'autres. Même à la fin du nettoyage, tous ces points ne seront pas nettoyés : l'ensemble de ces

points, que l'on dénomme une poussière de Cantor, restera sale.

Pour écrire les abscisses des points non nettoyés, on n'a besoin que de deux doigts, celui qui marque 0 et celui qui marque 2, remarqua la mathématicienne. Imaginons maintenant, continua-t-elle, que, comme les habitants de la planète Bis, nous n'ayons que deux doigts et que nous ne puissions calculer qu'en base deux. En comptant sur nos doigts nous pourrions encore écrire les abscisses des nombres du segment. Quand j'écris un nombre avec deux doigts, poursuivit-elle, nous pouvons reconnaître l'abscisse d'un point ou d'un autre selon la manière dont on interprète l'écriture : – si nous pensons qu'il s'agit d'une écriture des Bissiens, en base 2, nous obtenons tous les points du segment, – si nous pensons que c'est une écriture de Terriens, en base 3, nous obtenons tous les points non nettoyés.

L'ensemble de ces points non nettoyés est donc en bijection avec l'ensemble des points du segment : il semblerait que l'on n'ait rien nettoyé du tout ! Quel travail, s'exclamèrent en chœur les jeunes garçons, et nous ne savons même pas si on a nettoyé tout le segment ou si il est encore entièrement non nettoyé...



André DELEDICQ est maître de conférence. Il travaille à l'Institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques (IREM) de l'Université de Paris 7.

André DELEDICQ et Francis CASIRO, *Apprivoiser l'infini*, ACL-Les Éditions du Kangourou, 1997.