

L'infini, pierre de touche du constructivisme

ALLAN CALDER

Selon les mathématiciens constructivistes, un objet mathématique n'existe que si on peut le construire. Cette définition de l'existence mathématique oppose, depuis plus d'un siècle, constructivistes et formalistes.



La plus haute perfection de Dieu est la possibilité de créer un ensemble infini, et son immense bonté le conduit à le créer.
Georg Cantor

Si des hommes communiquaient avec une autre forme de vie dans l'Univers, les deux civilisations auraient, pensent les mathématiciens réalistes, en commun une forme élémentaire de mathématiques qu'elles utiliseraient pour dialoguer. Depuis l'époque de Platon, de nombreux mathématiciens et philosophes pensent que les mathématiques existent extrinsèquement, en dehors de la connaissance que nous en avons, ce qui leur confère une sorte de vérité absolue. La tâche du mathématicien consiste à découvrir cette vérité.

Cette croyance en une mathématique «préexistante» n'est pas partagée par tous : au XIX^e siècle, le mathématicien allemand Leopold Kronecker était persuadé que Dieu avait créé les entiers et que «tout le reste est l'œuvre de l'homme». Selon ce point de vue, le mathématicien ne découvre pas les mathématiques, il les invente.

Mathématiques découvertes ou mathématiques inventées, la question n'est pas futile : selon leur option philosophique, les mathématiciens orientent différemment leurs travaux. Ainsi, l'idée des mathématiques constructives, selon laquelle l'existence

d'un objet mathématique n'est établie que lorsqu'on a montré comment le construire, est fondée sur la conviction que les mathématiques sont inventées. Les conséquences de ce choix sur des sujets aussi importants que la validité de démonstrations mathématiques ou la signification de l'existence mathématique sont mises en lumière par les méthodes et les idées des mathématiques grecques, qui ont guidé l'évolution des mathématiques pendant les 25 derniers siècles.

Pour les Grecs, les mathématiques étaient presque réduites à la géométrie, et les *Éléments* d'Euclide en étaient le fleuron. Les méthodes déductives de l'école éléatique de philosophie (Parménide, Zénon, etc.), la logique aristotélicienne et l'idéalisme platonicien s'y fondaient en un système axiomatique. Euclide partit d'objets non définis, tels que le point, la droite et le plan, ainsi que d'un certain nombre d'axiomes, c'est-à-dire d'intuitions concernant ces objets ; il leur appliqua les règles de la déduction aristotélicienne pour obtenir de nouvelles propositions, ou théorèmes.

Bien que des objets comme le point (qui n'a pas de dimension) et la droite (qui a une longueur, mais pas de largeur) n'existent pas dans le monde réel, nous avons généralement le sentiment de savoir ce qu'ils sont. De surcroît, les théorèmes d'Euclide étaient confirmés

empiriquement : à l'aide d'un papier et d'un crayon, on vérifie, par exemple, que deux triangles dont les côtés sont égaux ont des angles égaux.

À l'époque moderne, les mathématiques ont continué à dépendre de la méthode axiomatique ; dans nombre de cas, cette méthode a été appliquée à des objets auxquels manquaient les vertus intuitives ou «constructibles» de la géométrie euclidienne. Pour les constructivistes, de telles applications ont faussé le sens des mathématiques. C'est pourquoi un certain nombre de propositions ont été avancées, ces 100 dernières années, afin de renouer avec la tradition intuitive. Nous examinerons ici cette longue controverse, dont les aspects les plus importants apparaissent au cours de l'évolution mathématique du concept d'infini.

Les constructions de l'infini

Les paradoxes de Zénon sur la divisibilité à l'infini et la continuité échaudèrent les mathématiciens grecs qui devinrent extrêmement prudents dans l'utilisation des infinis. L'objet fondamental des mathématiques grecques était la longueur, et Euclide, par exemple, se référerait, non pas à des lignes sans fin, mais à des segments de droite extensibles à des longueurs arbitraires. Cette notion d'infini «potentiel» – on considère des lignes finies en