

se réservant la possibilité de les étendre à l'infini – est une extrapolation raisonnable de l'expérience. Le concept opposé, l'infini «actuel», selon lequel il existe réellement des lignes de longueur infinie, est métaphysiquement différent ; il demande un effort d'imagination vertigineux. Aussi les mathématiciens ont-ils évité les infinis actuels pour se limiter aux infinis potentiels.

Au XVII^e siècle, René Descartes et Pierre de Fermat, en introduisant les coordonnées cartésiennes, transformèrent les problèmes sur les formes géométriques en problèmes sur les nombres. Cette numérisation de la géométrie conféra au nombre, plutôt qu'à la longueur, la place prépondérante dans les mathématiques. Les bases des travaux de Newton et de Leibniz sur le calcul infinitésimal étaient posées sous la forme d'un ensemble de lois pour manipuler des nombres qui sont infiniment petits sans être nuls.

Ce concept de quantité infiniment petite était troublant, à une époque où les objets mathématiques étaient porteurs de la même réalité que, par exemple, les électrons aujourd'hui. Il fallut un certain temps avant que l'indéniable utilité du calcul infinitésimal oblige les mathématiciens à accepter de plus ou moins bon gré l'idée des infinis actuels qui en résultait. Pendant les deux siècles qui suivirent, les mathématiciens forgèrent avec succès des techniques de calcul tout en contestant leurs bases philosophiques. À la fin du XIX^e siècle, cet irritant grain de sable au fond de l'huître mathématique produisit une perle : la théorie des ensembles.

Depuis Georg Cantor, à qui l'on doit les premières ébauches de la théorie des ensembles, un ensemble est défini comme une collection d'objets, réels ou abstraits, munie d'une loi qui détermine leur appartenance à l'ensemble. Cette idée simple eut de profondes

conséquences sur le concept d'infini. Des ensembles comme les nombres réels sont, par leur nature même, des infinis actuels. L'étude de tels objets conduisit Cantor à tirer la conclusion déconcertante que, tout comme la cardinalité des ensembles finis (ou leur nombre d'éléments), la cardinalité des ensembles infinis pouvait être mesurée : certains ensembles étaient plus infinis que d'autres !

Cantor définit alors toute une hiérarchie d'ensembles infinis : l'ensemble des nombres rationnels, des nombres irrationnels (des nombres réels qui ne sont pas des fractions), des nombres transcendants (des nombres réels qui ne sont racine d'aucune équation de type $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, où les nombres a_n sont des entiers relatifs), etc. Selon Cantor, deux ensembles ont la même taille, ou cardinalité, quand tous les éléments de l'un peuvent être, un à un, associés à tous les



1. DANS L'ÉCOLE D'ATHÈNES, qu'il exécuta au début du XVI^e siècle, Raphaël dépeint les grands philosophes et mathématiciens de la Grèce antique : au centre se tiennent Platon (la main levée) et Aristote ; en bas à gauche, Pythagore médite sur son système de proportions, alors qu'Euclide trace un cercle sur une ardoise, en bas à droite. Pour les Grecs, les mathématiques se limitaient presque exclusivement à la géométrie, et c'est dans son traité de géométrie, les *Éléments*, qu'Eu-

clide réunit pour la première fois les bases d'un système axiomatique. Dans ce système, certaines affirmations évidentes, initiatives ou axiomes, permettent d'obtenir, grâce aux règles aristotéliennes de la déduction, de nouveaux résultats nommés théorèmes. Les mathématiciens constructivistes proposent de reconstruire les mathématiques sans l'aide des concepts non intuitifs, tels que l'infini actuel, introduits en mathématiques depuis quelques siècles.

éléments de l'autre. Cette manière de faire correspondre deux ensembles est une bijection.

Ainsi un ensemble infini est dénombrable s'il a la même cardinalité que l'ensemble des naturels positifs 1, 2, 3... (voir *L'infini est-il paradoxal en mathématiques?*, pages 30 à 38). Beaucoup de mathématiciens contemporains de Cantor trouvèrent que l'idée d'ensemble infini était absurde. Cantor lui-même admit qu'il avait été acculé «presque contre son gré» à considérer des ensembles infinis comme des entités uniques. Cette suppression de la distinction entre infini potentiel et infini actuel était «en contradiction avec des traditions appréciées». Et, plus choquant encore que la notion d'ensemble,

était l'usage que Cantor en faisait ; les mathématiciens furent scandalisés par sa démonstration que l'ensemble des nombres transcendants est infini non dénombrable.

Preuves non constructives

Un nombre transcendant est un nombre qui n'est pas algébrique, et un nombre x est algébrique s'il est solution d'une équation de la forme indiquée précédemment. Par exemple, les nombres rationnels sont des nombres réels qui peuvent se mettre sous la forme p/q , avec p et q entiers, q non nul ; ainsi, tout nombre rationnel x est algébrique, car il vérifie l'équation $qx - p = 0$. Cantor démontra qu'il

existe des nombres, les nombres transcendants, qui ne remplissent pas ces conditions ; il montra surtout que les nombres transcendants sont en nombre infini, en commençant par préciser que l'ensemble des nombres algébriques est infini dénombrable. Autrement dit, il mit en évidence une bijection entre l'ensemble des entiers naturels et l'ensemble des nombres algébriques.

L'ensemble des nombres réels n'étant pas dénombrable, il doit donc exister des nombres réels «laissés pour compte», c'est-à-dire qui ne sont pas algébriques. Supposons maintenant que l'ensemble de ces nombres transcendants soit dénombrable. Il n'est pas difficile de démontrer que l'ensemble formé de l'union de deux ensembles dénom-

2. Les ordinaux, des infinis toujours plus grands

Les premiers nombres connus furent les nombres entiers naturels 0, 1, 2, 3..., qui permettent de dénombrer les ensembles d'objets discontinus : des moutons, des sacs de blé, etc. On représente géométriquement ces nombres entiers naturels par des points régulièrement répartis sur une demi-droite, la distance entre l'origine et un point de la demi-droite représentant un nombre entier naturel. Les Égyptiens, les Grecs, les Arabes et les Européens de la Renaissance ont généralisé le concept de nombre entier naturel et défini les nombres rationnels, ou fractions, grâce aux opérations «algébriques» que sont la somme, la différence, le produit et le quotient de deux nombres entiers naturels.

Après les nombres rationnels, les Grecs introduisirent les nombres réels pour des raisons géométriques : $\sqrt{2}$, par exemple, est la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1. Avec ces généralisations, tous les points d'une droite correspondent à un nombre réel, et inversement. Les opérations algébriques appliquées à ces nombres conduisirent à diverses généralisations, tels les nombres complexes.

Vers la fin du XIX^e siècle, le mathématicien allemand Georg Cantor voulut généraliser le concept de nombre, non pas de façon algébrique, comme l'avaient fait ses prédécesseurs, mais du point de vue de leur ordre : autrement dit, il voulut, à partir du principe de dénombrement utilisé dans la construction des nombres entiers, généraliser la relation «est supérieur à» (par exemple, 7 est supérieur à 4) et conserver l'acte de compter par lequel on place un nouveau nombre après des nombres déjà définis. Les nombres infinis, ou «transfinités», inventés par Cantor permettent de compter plus loin qu'avec les nombres entiers naturels. Ainsi les ordinaux sont, soit les nombres entiers naturels, soit les nombres transfinités.

Comment Cantor a-t-il proposé de dépasser l'infini des nombres entiers naturels ? On l'imagine en reprenant l'interprétation géométrique des nombres par des points d'une demi-droite : pour dépasser l'infini que représente cet ensemble de points, on juxtapose seulement une deuxième demi-droite à côté de la première, puis une troisième, et ainsi de suite (voir la figure ci-contre). On juxtapose ainsi 10, ou 100 demi-droites, et comme le nombre de demi-droites n'est pas limité, on obtient finalement un quart de plan tout entier plein de demi-droites. Pourquoi s'arrêter là et ne pas chercher ensuite à empiler de tels plans ? Les possibilités de juxtaposition sont illimitées, et les objets obtenus sont les ordinaux.

Revenons à l'image intuitive des demi-droites et examinons les ordinaux successifs que nous créons par le procédé précédent. Après avoir compté tous les nombres entiers naturels (en nombre infini), on introduit le nombre transfini ω , que l'on représente comme l'origine de la deuxième demi-droite. En se déplaçant ensuite sur cette demi-droite, on compte $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3$... Puis, quand on a ainsi compté tous les nombres de la forme $\omega + k$, où k est un nombre entier naturel, on introduit le nombre $\omega + \omega$, que l'on note aussi $\omega \times 2$, qui constitue l'origine de la troisième demi-droite. Enfin, quand on a compté tous les nombres de la forme $(\omega \times p) + k$ (où p et k sont des nombres entiers naturels quelconques), on introduit le nombre transfini ω^2 : à ce stade, on a formé le quart de plan évoqué précédemment. Ainsi, le nombre ordinal ω^2 qui vient après tous les nombres de ce réseau régulier plan est placé au-dessus de 0 dans un plan superposé au premier. On empilera alors d'autres plans pour faire $\omega^2 \times 2$, $\omega^2 \times 3$...

Dans un espace de dimension n supérieure à 3, l'ordinal ω^n est encore visualisable, mais la représentation des ordinaux a des limites : l'ordinal ω^ω qui vient après tous les ω^n n'est pas représentable aussi simplement. Le leitmotiv de la construction des nombres transfinités est «après» : étant donné un ensemble X d'ordinaux, on définit un nouvel ordinal x par la condition que x soit plus grand (ou «après») que tous les éléments de l'ensemble X .

À ce stade, nous n'avons pas encore défini rigoureusement les ordinaux. La définition la plus simple est fondée sur un concept de «bon ordre», c'est-à-dire une façon de classer (d'ordonner) les nombres entiers naturels. Le bon ordre le plus simple correspond à celui que nous utilisons quand nous énumérons les nombres entiers naturels et que nous avons mis en œuvre précédemment : son principe tient dans «est après». Toutefois d'autres bons ordres sont possibles. Par exemple, choisissons d'ordonner deux à deux les nombres entiers non nuls en utilisant leur décomposition en facteurs premiers : tout nombre entier naturel non nul est le produit des nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11, 13... avec des exposants convenables. Par exemple, 84 est égal au produit $2^2 \times 3^1 \times 5^0 \times 7^1$. On obtient un bon ordre si, pour comparer deux nombres entiers naturels, on considère leur décomposition en facteurs premiers et l'on cherche le plus grand facteur qui n'a pas le même exposant dans les deux nombres ; on décide de placer