

éléments de l'autre. Cette manière de faire correspondre deux ensembles est une bijection.

Ainsi un ensemble infini est dénombrable s'il a la même cardinalité que l'ensemble des naturels positifs 1, 2, 3... (voir *L'infini est-il paradoxal en mathématiques?*, pages 30 à 38). Beaucoup de mathématiciens contemporains de Cantor trouvèrent que l'idée d'ensemble infini était absurde. Cantor lui-même admit qu'il avait été acculé «presque contre son gré» à considérer des ensembles infinis comme des entités uniques. Cette suppression de la distinction entre infini potentiel et infini actuel était «en contradiction avec des traditions appréciées». Et, plus choquant encore que la notion d'ensemble,

était l'usage que Cantor en faisait ; les mathématiciens furent scandalisés par sa démonstration que l'ensemble des nombres transcendants est infini non dénombrable.

Preuves non constructives

Un nombre transcendant est un nombre qui n'est pas algébrique, et un nombre x est algébrique s'il est solution d'une équation de la forme indiquée précédemment. Par exemple, les nombres rationnels sont des nombres réels qui peuvent se mettre sous la forme p/q , avec p et q entiers, q non nul ; ainsi, tout nombre rationnel x est algébrique, car il vérifie l'équation $qx - p = 0$. Cantor démontra qu'il

existe des nombres, les nombres transcendants, qui ne remplissent pas ces conditions ; il montra surtout que les nombres transcendants sont en nombre infini, en commençant par préciser que l'ensemble des nombres algébriques est infini dénombrable. Autrement dit, il mit en évidence une bijection entre l'ensemble des entiers naturels et l'ensemble des nombres algébriques.

L'ensemble des nombres réels n'étant pas dénombrable, il doit donc exister des nombres réels «laissés pour compte», c'est-à-dire qui ne sont pas algébriques. Supposons maintenant que l'ensemble de ces nombres transcendants soit dénombrable. Il n'est pas difficile de démontrer que l'ensemble formé de l'union de deux ensembles dénom-

2. Les ordinaux, des infinis toujours plus grands

Les premiers nombres connus furent les nombres entiers naturels 0, 1, 2, 3..., qui permettent de dénombrer les ensembles d'objets discontinus : des moutons, des sacs de blé, etc. On représente géométriquement ces nombres entiers naturels par des points régulièrement répartis sur une demi-droite, la distance entre l'origine et un point de la demi-droite représentant un nombre entier naturel. Les Égyptiens, les Grecs, les Arabes et les Européens de la Renaissance ont généralisé le concept de nombre entier naturel et défini les nombres rationnels, ou fractions, grâce aux opérations «algébriques» que sont la somme, la différence, le produit et le quotient de deux nombres entiers naturels.

Après les nombres rationnels, les Grecs introduisirent les nombres réels pour des raisons géométriques : $\sqrt{2}$, par exemple, est la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1. Avec ces généralisations, tous les points d'une droite correspondent à un nombre réel, et inversement. Les opérations algébriques appliquées à ces nombres conduisirent à diverses généralisations, tels les nombres complexes.

Vers la fin du XIX^e siècle, le mathématicien allemand Georg Cantor voulut généraliser le concept de nombre, non pas de façon algébrique, comme l'avaient fait ses prédécesseurs, mais du point de vue de leur ordre : autrement dit, il voulut, à partir du principe de dénombrement utilisé dans la construction des nombres entiers, généraliser la relation «est supérieur à» (par exemple, 7 est supérieur à 4) et conserver l'acte de compter par lequel on place un nouveau nombre après des nombres déjà définis. Les nombres infinis, ou «transfinités», inventés par Cantor permettent de compter plus loin qu'avec les nombres entiers naturels. Ainsi les ordinaux sont, soit les nombres entiers naturels, soit les nombres transfinités.

Comment Cantor a-t-il proposé de dépasser l'infini des nombres entiers naturels ? On l'imagine en reprenant l'interprétation géométrique des nombres par des points d'une demi-droite : pour dépasser l'infini que représente cet ensemble de points, on juxtapose seulement une deuxième demi-droite à côté de la première, puis une troisième, et ainsi de suite (voir la figure ci-contre). On juxtapose ainsi 10, ou 100 demi-droites, et comme le nombre de demi-droites n'est pas limité, on obtient finalement un quart de plan tout entier plein de demi-droites. Pourquoi s'arrêter là et ne pas chercher ensuite à empiler de tels plans ? Les possibilités de juxtaposition sont illimitées, et les objets obtenus sont les ordinaux.

Revenons à l'image intuitive des demi-droites et examinons les ordinaux successifs que nous créons par le procédé précédent. Après avoir compté tous les nombres entiers naturels (en nombre infini), on introduit le nombre transfini ω , que l'on représente comme l'origine de la deuxième demi-droite. En se déplaçant ensuite sur cette demi-droite, on compte $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3$... Puis, quand on a ainsi compté tous les nombres de la forme $\omega + k$, où k est un nombre entier naturel, on introduit le nombre $\omega + \omega$, que l'on note aussi $\omega \times 2$, qui constitue l'origine de la troisième demi-droite. Enfin, quand on a compté tous les nombres de la forme $(\omega \times p) + k$ (où p et k sont des nombres entiers naturels quelconques), on introduit le nombre transfini ω^2 : à ce stade, on a formé le quart de plan évoqué précédemment. Ainsi, le nombre ordinal ω^2 qui vient après tous les nombres de ce réseau régulier plan est placé au-dessus de 0 dans un plan superposé au premier. On empilera alors d'autres plans pour faire $\omega^2 \times 2$, $\omega^2 \times 3$...

Dans un espace de dimension n supérieure à 3, l'ordinal ω^n est encore visualisable, mais la représentation des ordinaux a des limites : l'ordinal ω^ω qui vient après tous les ω^n n'est pas représentable aussi simplement. Le leitmotiv de la construction des nombres transfinités est «après» : étant donné un ensemble X d'ordinaux, on définit un nouvel ordinal x par la condition que x soit plus grand (ou «après») que tous les éléments de l'ensemble X .

À ce stade, nous n'avons pas encore défini rigoureusement les ordinaux. La définition la plus simple est fondée sur un concept de «bon ordre», c'est-à-dire une façon de classer (d'ordonner) les nombres entiers naturels. Le bon ordre le plus simple correspond à celui que nous utilisons quand nous énumérons les nombres entiers naturels et que nous avons mis en œuvre précédemment : son principe tient dans «est après». Toutefois d'autres bons ordres sont possibles. Par exemple, choisissons d'ordonner deux à deux les nombres entiers non nuls en utilisant leur décomposition en facteurs premiers : tout nombre entier naturel non nul est le produit des nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11, 13... avec des exposants convenables. Par exemple, 84 est égal au produit $2^2 \times 3^1 \times 5^0 \times 7^1$. On obtient un bon ordre si, pour comparer deux nombres entiers naturels, on considère leur décomposition en facteurs premiers et l'on cherche le plus grand facteur qui n'a pas le même exposant dans les deux nombres ; on décide de placer

brables est dénombrable (cela ne pose aucun problème si un ensemble, ou les deux, sont finis ; si tous les deux sont infinis, pour montrer que leur union est dénombrable, il suffit de mettre l'un d'eux en bijection avec l'ensemble des nombres impairs, et l'autre avec les nombres pairs). Alors, si l'hypothèse était vraie, l'ensemble des nombres réels (qui est constitué de l'union des nombres algébriques et des nombres transcendants) serait dénombrable, ce qui est une contradiction. Par conséquent, l'hypothèse selon laquelle l'ensemble des nombres transcendants est dénombrable est fautive : cet ensemble est donc infini non dénombrable.

La démonstration de Cantor utilise la méthode classique du raison-

nement par l'absurde, où l'on démontre une proposition en montrant que sa négation conduit à une contradiction. Des mathématiciens comme Kronecker furent scandalisés par une telle démonstration, parce que, dans la tradition mathématique, il n'y a pas d'existence sans construction : pour établir l'existence d'un objet mathématique, on doit spécifier par quelle méthode on peut, au moins en principe, construire l'objet. Que cette construction soit véritablement effectuée, ou même faisable, en un temps «raisonnablement» court, n'est pas une nécessité, du moment que la construction comporte un nombre fini d'étapes et que le passage d'une étape à la suivante est explicite. La démon-

stration de Cantor ne remplissait pas ces conditions : elle ne permettait pas de construire des nombres transcendants et certainement pas une infinité d'entre eux!

La démonstration de Cantor fut un des premiers exemples d'une preuve d'existence pure. Elle n'indique pas comment obtenir un nombre transcendant, mais établit l'existence de tels nombres en montrant la contradiction qu'entraînerait leur non-existence.

La preuve d'existence pure

Le spectre de l'infini se dessine. Un raisonnement par l'absurde qui établit l'existence d'un objet dans un ensemble fini est accepté par tous les

après le nombre pour lequel cet exposant est le plus grand. Par exemple, pour les nombres 11 191 et 32 984, on cherche d'abord les décompositions $19^2 \times 31$ et $23 \times 7 \times 19 \times 31$. Le facteur 31 ayant le même exposant dans les deux décompositions, on compare les exposants de 19 : il est supérieur dans 11 191, de sorte qu'on classe ce nombre après 32 984. De la même façon, ce bon ordre place 2^{100} avant 5.

Ce bon ordre permet d'ordonner tous les nombres entiers non nuls de la façon suivante : 1, 2, 2^2 , 2^3 , 2^4 , ..., 3×2 , 3×2^2 , 3×2^3 , ..., 3^2 , $3^2 \times 2$, ... et l'on peut associer un ordinal à chaque nombre de cette suite : on associe l'ordinal 0 à 1, l'ordinal 1 à 2, l'ordinal 2 à 2^2 , l'ordinal 3 à 2^3 , ..., l'ordinal ω à 3 , l'ordinal $\omega + 1$ à 3×2 , l'ordinal $\omega \times 2$ à 3^2 , etc. Cette relation de bon ordre permet de représenter tous les nombres ordinaux jusqu'à ω^ω (non compris).

Les ordinaux sont à l'origine de la grande peur qu'ont ressentie les mathématiciens au début du siècle : le mathématicien italien Cesare Burali Forti (1861-1931) mit en évidence le paradoxe suivant : par définition, tout élément d'un ordinal est un ordinal, et la relation d'appartenance entre ordinaux est un bon ordre. L'ensemble des ordinaux est donc un ordinal x , et x est un élément de x (parce que x est formé de tous les ordinaux). Or le point x de l'ensemble x des ordinaux vérifie la proposition « x appartient à x », ce qui contredit l'irréflexivité de la relation d'appartenance sur x . Pour lever ce paradoxe, le logicien britannique Bertrand Russell (1872-1970) et d'autres mathématiciens imposèrent une définition *ad hoc* : une «classe» d'éléments définis par une propriété commune n'est un ensemble que dans certaines conditions, et, notamment, la classe de tous les ordinaux n'est pas un ensemble. De ce fait, on ne peut plus conclure « x appartient à x » dans la démonstration du paradoxe.

Nous avons vu que les bons ordres et les ordinaux sont deux manières de décrire la même réalité : à tout bon ordre correspond

