

brables est dénombrable (cela ne pose aucun problème si un ensemble, ou les deux, sont finis ; si tous les deux sont infinis, pour montrer que leur union est dénombrable, il suffit de mettre l'un d'eux en bijection avec l'ensemble des nombres impairs, et l'autre avec les nombres pairs). Alors, si l'hypothèse était vraie, l'ensemble des nombres réels (qui est constitué de l'union des nombres algébriques et des nombres transcendants) serait dénombrable, ce qui est une contradiction. Par conséquent, l'hypothèse selon laquelle l'ensemble des nombres transcendants est dénombrable est fautive : cet ensemble est donc infini non dénombrable.

La démonstration de Cantor utilise la méthode classique du raisonnement

par l'absurde, où l'on démontre une proposition en montrant que sa négation conduit à une contradiction. Des mathématiciens comme Kronecker furent scandalisés par une telle démonstration, parce que, dans la tradition mathématique, il n'y a pas d'existence sans construction : pour établir l'existence d'un objet mathématique, on doit spécifier par quelle méthode on peut, au moins en principe, construire l'objet. Que cette construction soit véritablement effectuée, ou même faisable, en un temps «raisonnablement» court, n'est pas une nécessité, du moment que la construction comporte un nombre fini d'étapes et que le passage d'une étape à la suivante est explicite. La démonstration

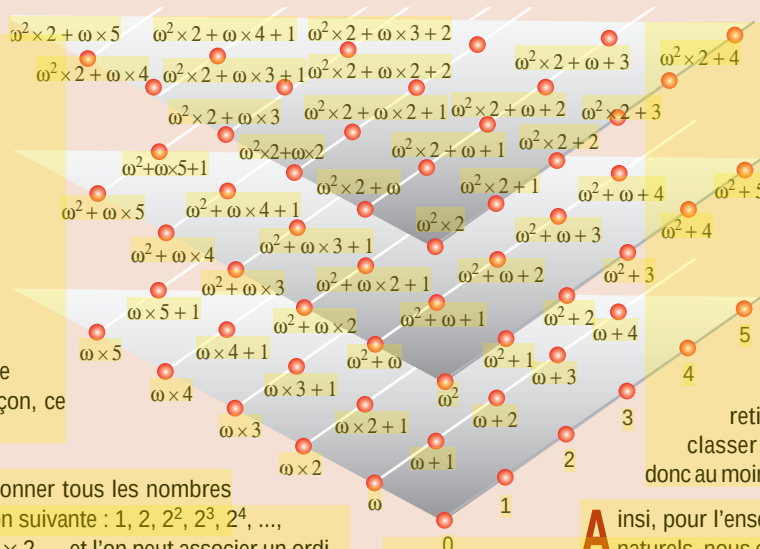
de Cantor ne remplissait pas ces conditions : elle ne permettait pas de construire des nombres transcendants et certainement pas une infinité d'entre eux!

La démonstration de Cantor fut un des premiers exemples d'une preuve d'existence pure. Elle n'indique pas comment obtenir un nombre transcendant, mais établit l'existence de tels nombres en montrant la contradiction qu'entraînerait leur non-existence.

La preuve d'existence pure

Le spectre de l'infini se dessine. Un raisonnement par l'absurde qui établit l'existence d'un objet dans un ensemble fini est accepté par tous les

après le nombre pour lequel cet exposant est le plus grand. Par exemple, pour les nombres 11 191 et 32 984, on cherche d'abord les décompositions $19^2 \times 31$ et $23 \times 7 \times 19 \times 31$. Le facteur 31 ayant le même exposant dans les deux décompositions, on compare les exposants de 19 : il est supérieur dans 11 191, de sorte qu'on classe ce nombre après 32 984. De la même façon, ce bon ordre place 2^{100} avant 5.



un ordinal unique. Le mathématicien Ernst Zermelo (1871-1953) a montré (en utilisant l'axiome du choix, controversé) que, pour tout ensemble, on peut trouver une relation de bon ordre qui ordonne les éléments de l'ensemble. Si l'on oublie les noms des éléments et que l'on retient seulement la façon de classer ces éléments, on associe donc au moins un ordinal à un ensemble.

Ce bon ordre permet d'ordonner tous les nombres entiers non nuls de la façon suivante : 1, 2, 2^2 , 2^3 , 2^4 , ..., 3×2 , 3×2^2 , 3×2^3 , ..., 3^2 , $3^2 \times 2$, ... et l'on peut associer un ordinal à chaque nombre de cette suite : on associe l'ordinal 0 à 1, l'ordinal 1 à 2, l'ordinal 2 à 2^2 , l'ordinal 3 à 2^3 , ..., l'ordinal ω à 3, l'ordinal $\omega + 1$ à 3×2 , l'ordinal $\omega \times 2$ à 3^2 , etc. Cette relation de bon ordre permet de représenter tous les nombres ordinaux jusqu'à ω^ω (non compris).

Les ordinaux sont à l'origine de la grande peur qu'ont ressentie les mathématiciens au début du siècle : le mathématicien italien Cesare Burali Forti (1861-1931) mit en évidence le paradoxe suivant : par définition, tout élément d'un ordinal est un ordinal, et la relation d'appartenance entre ordinaux est un bon ordre. L'ensemble des ordinaux est donc un ordinal x , et x est un élément de x (parce que x est formé de tous les ordinaux). Or le point x de l'ensemble x des ordinaux vérifie la proposition « x appartient à x », ce qui contredit l'irréflexivité de la relation d'appartenance sur x . Pour lever ce paradoxe, le logicien britannique Bertrand Russell (1872-1970) et d'autres mathématiciens imposèrent une définition *ad hoc* : une «classe» d'éléments définis par une propriété commune n'est un ensemble que dans certaines conditions, et, notamment, la classe de tous les ordinaux n'est pas un ensemble. De ce fait, on ne peut plus conclure « x appartient à x » dans la démonstration du paradoxe.

Nous avons vu que les bons ordres et les ordinaux sont deux manières de décrire la même réalité : à tout bon ordre correspond

Ainsi, pour l'ensemble des nombres entiers naturels, nous connaissons au moins deux bons ordres : celui que nous utilisons quotidiennement pour classer les nombres (0, 1, 2, 3, ...) et celui que nous avons construit à partir de la décomposition en facteurs premiers (0, 1, 2, 2^2 , 2^3 , ..., 3 , 3×2 , 3×2^2 , ...). Le premier bon ordre est associé à l'ordinal ω , et le second à l'ordinal ω^ω .

Le plus petit des ordinaux associés à un ensemble est le «cardinal» (ou nombre d'éléments) de l'ensemble. Cette définition généralise aux ensembles infinis une notion familière dans le cas des ensembles finis. On montre facilement que les nombres entiers naturels sont des cardinaux, et l'on énumère les cardinaux infinis dans ce que l'on nomme la suite des alephs. Ainsi aleph zéro est le cardinal de l'ensemble des nombres entiers naturels ; c'est aussi le plus petit des cardinaux infinis, et il est confondu avec l'ordinal ω . Cantor montra d'autre part que le cardinal de l'ensemble des nombres réels est supérieur ou égal à aleph un (c'est ce que l'on nomme le paradoxe de Cantor). Il ruina sa santé à essayer de démontrer que le cardinal de l'ensemble des nombres réels était exactement égal à aleph un (hypothèse du continu). En fait, l'hypothèse du continu n'est pas décidable sur la seule base des axiomes de la théorie des ensembles.

Jean-Yves GIRARD
Institut de mathématiques (CNRS), Marseille-Luminy



Jan Brouwer (1881-1966)

mathématiciens, car on peut toujours (en principe) exhiber l'objet cherché en dressant la liste exhaustive des éléments de l'ensemble. Ce raisonnement ne s'applique pas aux nombres transcendants, eux-mêmes éléments de l'ensemble infini des nombres réels : pour cette raison, de nombreux mathématiciens rejetèrent la démonstration de Cantor, arguant qu'une contradiction ne remplaçait pas un exemple tangible.

Cette controverse était loin d'être apaisée quand David Hilbert publia, en 1889, une preuve d'existence pure encore plus litigieuse. La démonstration concernait un problème posé par le mathématicien allemand Paul Gordon. Ce problème, l'une des questions mathématiques les plus brûlantes du temps, conjecturait l'existence d'ensembles (finis) d'objets présentant des propriétés particulières dans un certain nombre de cas. Hilbert, en raisonnant par l'absurde, montra que les ensembles en question existaient toujours. Cantor avait prouvé l'existence d'un ensemble d'objets dont on connaissait au moins quelques repré-

sentants : on avait découvert certains nombres transcendants quelque 30 ans auparavant. Hilbert soutenait à présent qu'il avait établi l'existence d'objets que nul n'avait jamais vus et que personne ne savait construire. «Ce ne sont plus des mathématiques, s'écria Gordon, c'est de la théologie!»

Néanmoins, la preuve d'existence pure faisait merveille dans les mains de Hilbert, et comme la théorie des ensembles commençait à apporter d'importants résultats mathématiques, les objections s'estompèrent. Gordon en vint même à reconnaître que «la théologie, elle aussi, avait ses mérites». Après la mort de Kronecker, en 1891, l'opposition aux méthodes non constructives diminua d'intensité, jusqu'à ce que le mathématicien hollandais Luitzen Brouwer lui insufflât un sang neuf, en 1907. Selon Brouwer, les mathématiques perdraient tout sens si on ne faisait pas une distinction nette entre l'existence réelle, ou constructive, et l'existence pure. Ces deux notions avaient été confondues dans le prolongement de la logique classique du fini à l'infini, notamment à propos de la loi du tiers exclu.

Le tiers exclu... exclu

La loi aristotélicienne du tiers exclu postule que toute proposition est soit vraie, soit fausse. Sans cette loi, il n'est évidemment pas de preuve par l'absurde. Par exemple, dans la démonstration de l'existence des nombres transcendants par Cantor, l'hypothèse que tout nombre est algébrique mène à une contradiction ; ainsi, selon le principe du tiers exclu, il doit exister des nombres transcendants. La logique aristotélicienne fait si bien partie de la vie quotidienne que la remettre en cause paraît extravagant. La majorité des gens sont persuadés du bien-fondé de cette loi : si un sac contient un nombre fini de pommes, personne ne doutera qu'il y a, soit une pomme rouge dans le sac, soit qu'il n'y en a pas. Personne n'a besoin de sortir les pommes du sac pour s'assurer que l'une de ces deux assertions est exacte (si l'on veut savoir laquelle est vraie, on répondra à la question après un temps fini).

La situation est différente quand on applique la loi du tiers exclu à un ensemble infini, par exemple un sac contenant une infinité de pommes, car on ne pourra jamais les examiner

L'INFINI ACTUEL ET LEIBNIZ

«Je suis tellement pour l'infini actuel qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre je tiens qu'elle l'affecte partout, pour mieux marquer la perfection de son auteur. Ainsi, je crois qu'il n'y a aucune partie de la matière qui ne soit, je ne dis pas divisible, mais actuellement divisée, et, par conséquent, la moindre particule doit être considérée comme un monde plein d'une infinité de créatures différentes.»

Leibniz

toutes. Si l'on peut affirmer que le sac contient au moins une pomme rouge quand on en a tiré une, on ne peut pas conclure que le sac ne contient pas de pomme rouge tant qu'on n'a pas retiré toutes les pommes, ce qui est impossible puisqu'elles sont en nombre infini.

L'infini actuel n'étant pas présent dans la nature, les mathématiciens n'en ont donc pas d'idée intuitive. Pour appliquer la loi du tiers exclu à des ensembles infinis, ils doivent extrapoler à partir de leur connaissance des ensembles finis. Cette extrapolation semble d'autant plus délicate à justifier que les Grecs, à qui l'on doit cette loi du tiers exclu, avaient la plus grande méfiance envers les infinis actuels. Brouwer a même observé que les résultats de telles extrapolations pourraient ne pas être «constructivement» justes, car il serait possible de prouver l'existence d'objets «idéaux» impossibles à construire. Brouwer avançait qu'en donnant à de tels objets idéaux la même «réalité» qu'aux objets constructibles on portait atteinte à la certitude mathématique. Les objets idéaux en appellent d'autres et, bientôt, on ne sait plus si les mathématiques ont un fondement réel ou non.

Les critiques de Brouwer arrivèrent à un moment où la théorie des ensembles était vulnérable. Après 1900, la réorganisation ensembliste des mathématiques avait abouti à la formulation de paradoxes. Par exemple, comme, pour tout ensemble, on peut trouver un ensemble de cardinalité supérieure, Cantor avait indiqué qu'il devait exister un ensemble V de cardinalité supérieure à celle de l'ensemble universel U , qui contient tous les ensembles ; d'autre part, comme U contient tout, tous les éléments de V doivent appartenir à U , et la cardinalité de V doit être inférieure ou égale



3. L'UTILISATION DU TIERS EXCLU est délicate dans le cas d'ensembles infinis. Ainsi comment décider si un ensemble dénombrable de pommes contient ou non une pomme rouge sans les examiner toutes, ce qui est impossible? Les démonstrations par contradiction reposent sur la loi du tiers exclu, qui interdit que toute proposition soit autre que vraie ou fausse. Les constructivistes rejettent l'application d'une telle loi à des ensembles infinis, parce qu'il peut être impossible de déterminer laquelle des deux propositions est vraie. En médaillon, le père du constructionnisme, Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966).