



Jan Brouwer (1881-1966)

mathématiciens, car on peut toujours (en principe) exhiber l'objet cherché en dressant la liste exhaustive des éléments de l'ensemble. Ce raisonnement ne s'applique pas aux nombres transcendants, eux-mêmes éléments de l'ensemble infini des nombres réels :

pour cette raison, de nombreux mathématiciens rejetèrent la démonstration de Cantor, arguant qu'une contradiction ne remplaçait pas un exemple tangible.

Cette controverse était loin d'être apaisée quand David Hilbert publia, en 1889, une preuve d'existence pure encore plus litigieuse. La démonstration concernait un problème posé par le mathématicien allemand Paul Gordon. Ce problème, l'une des questions mathématiques les plus brûlantes du temps, conjecturait l'existence d'ensembles (finis) d'objets présentant des propriétés particulières dans un certain nombre de cas. Hilbert, en raisonnant par l'absurde, montra que les ensembles en question existaient toujours. Cantor avait prouvé l'existence d'un ensemble d'objets dont on connaissait au moins quelques repré-

sentants : on avait découvert certains nombres transcendants quelque 30 ans auparavant. Hilbert soutenait à présent qu'il avait établi l'existence d'objets que nul n'avait jamais vus et que personne ne savait construire. «Ce ne sont plus des mathématiques, s'écria Gordon, c'est de la théologie!»

Néanmoins, la preuve d'existence pure faisait merveille dans les mains de Hilbert, et comme la théorie des ensembles commençait à apporter d'importants résultats mathématiques, les objections s'estompèrent. Gordon en vint même à reconnaître que «la théologie, elle aussi, avait ses mérites». Après la mort de Kronecker, en 1891, l'opposition aux méthodes non constructives diminua d'intensité, jusqu'à ce que le mathématicien hollandais Luitzen Brouwer lui insufflât un sang neuf, en 1907. Selon Brouwer, les mathématiques perdraient tout sens si on ne faisait pas une distinction nette entre l'existence réelle, ou constructive, et l'existence pure. Ces deux notions avaient été confondues dans le prolongement de la logique classique du fini à l'infini, notamment à propos de la loi du tiers exclu.

Le tiers exclu... exclu

La loi aristotélicienne du tiers exclu postule que toute proposition est soit vraie, soit fausse. Sans cette loi, il n'est évidemment pas de preuve par l'absurde. Par exemple, dans la démonstration de l'existence des nombres transcendants par Cantor, l'hypothèse que tout nombre est algébrique mène à une contradiction ; ainsi, selon le principe du tiers exclu, il doit exister des nombres transcendants. La logique aristotélicienne fait si bien partie de la vie quotidienne que la remettre en cause paraît extravagant. La majorité des gens sont persuadés du bien-fondé de cette loi : si un sac contient un nombre fini de pommes, personne ne doutera qu'il y a, soit une pomme rouge dans le sac, soit qu'il n'y en a pas. Personne n'a besoin de sortir les pommes du sac pour s'assurer que l'une de ces deux assertions est exacte (si l'on veut savoir laquelle est vraie, on répondra à la question après un temps fini).

La situation est différente quand on applique la loi du tiers exclu à un ensemble infini, par exemple un sac contenant une infinité de pommes, car on ne pourra jamais les examiner

L'INFINI ACTUEL ET LEIBNIZ

«Je suis tellement pour l'infini actuel qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre je tiens qu'elle l'affecte partout, pour mieux marquer la perfection de son auteur. Ainsi, je crois qu'il n'y a aucune partie de la matière qui ne soit, je ne dis pas divisible, mais actuellement divisée, et, par conséquent, la moindre particule doit être considérée comme un monde plein d'une infinité de créatures différentes.»

Leibniz

toutes. Si l'on peut affirmer que le sac contient au moins une pomme rouge quand on en a tiré une, on ne peut pas conclure que le sac ne contient pas de pomme rouge tant qu'on n'a pas retiré toutes les pommes, ce qui est impossible puisqu'elles sont en nombre infini.

L'infini actuel n'étant pas présent dans la nature, les mathématiciens n'en ont donc pas d'idée intuitive. Pour appliquer la loi du tiers exclu à des ensembles infinis, ils doivent extrapoler à partir de leur connaissance des ensembles finis. Cette extrapolation semble d'autant plus délicate à justifier que les Grecs, à qui l'on doit cette loi du tiers exclu, avaient la plus grande méfiance envers les infinis actuels. Brouwer a même observé que les résultats de telles extrapolations pourraient ne pas être «constructivement» justes, car il serait possible de prouver l'existence d'objets «idéaux» impossibles à construire. Brouwer avançait qu'en donnant à de tels objets idéaux la même «réalité» qu'aux objets constructibles on portait atteinte à la certitude mathématique. Les objets idéaux en appellent d'autres et, bientôt, on ne sait plus si les mathématiques ont un fondement réel ou non.

Les critiques de Brouwer arrivèrent à un moment où la théorie des ensembles était vulnérable. Après 1900, la réorganisation ensembliste des mathématiques avait abouti à la formulation de paradoxes. Par exemple, comme, pour tout ensemble, on peut trouver un ensemble de cardinalité supérieure, Cantor avait indiqué qu'il devait exister un ensemble V de cardinalité supérieure à celle de l'ensemble universel U , qui contient tous les ensembles ; d'autre part, comme U contient tout, tous les éléments de V doivent appartenir à U , et la cardinalité de V doit être inférieure ou égale



3. L'UTILISATION DU TIERS EXCLU est délicate dans le cas d'ensembles infinis. Ainsi comment décider si un ensemble dénombrable de pommes contient ou non une pomme rouge sans les examiner toutes, ce qui est impossible? Les démonstrations par contradiction reposent sur la loi du tiers exclu, qui interdit que toute proposition soit autre que vraie ou fausse. Les constructivistes rejettent l'application d'une telle loi à des ensembles infinis, parce qu'il peut être impossible de déterminer laquelle des deux propositions est vraie. En médaillon, le père du constructionnisme, Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966).

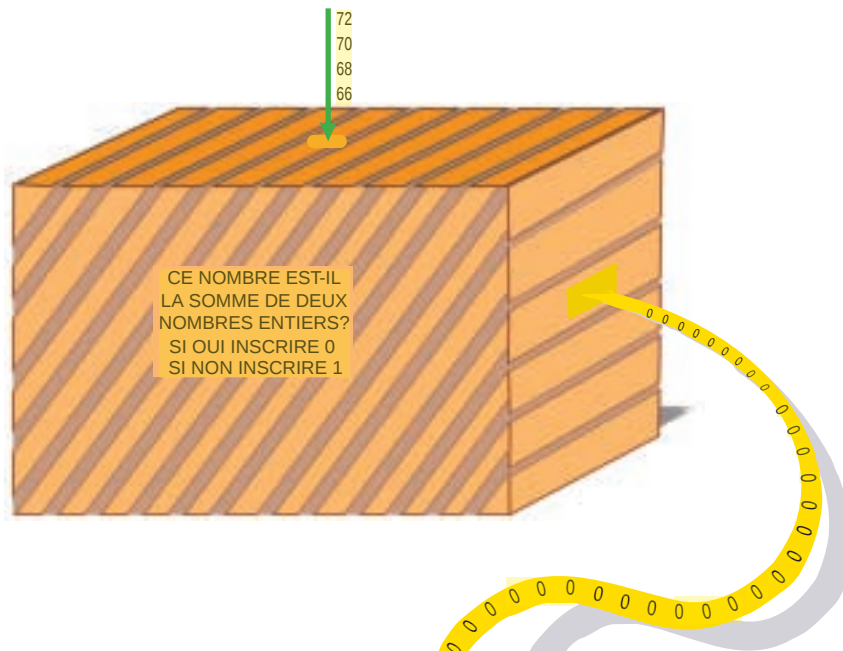
à celle de *U*. Des paradoxes de ce genre sapèrent les fondements des mathématiques ensemblistes et, selon Brouwer, les erreurs provenaient de l'introduction des objets idéaux en mathématiques.

Brouwer était convaincu que l'on résoudrait la crise des paradoxes si l'on rejetait objets et arguments idéaux, c'est-à-dire si l'on rebâtissait les mathématiques avec des méthodes exclusivement constructives. Comme ce programme, nommé intuitionnisme, aurait fait s'écrouler la presque totalité de l'édifice, il ne fut pas bien reçu, même de la part des mathématiciens ralliés à la cause de Brouwer. Ils étaient bien plus disposés à suivre le plan de Hilbert, qui ne cherchait pas à purifier les mathématiques du dedans, mais à les justifier du dehors. Ainsi les mathématiciens ne seraient pas, selon les propres mots de Hilbert, chassés du paradis que Cantor leur avait ouvert.

Hilbert croyait que, même si les objets idéaux n'avaient pas de signification propre, on pourrait en déduire des objets et des théorèmes importants et utiles. Selon lui, on pouvait espérer redonner un sens à la notion de certitude en transformant les mathématiques en un système axiomatique purement formel : une sorte de jeu dont l'intérêt résiderait non pas dans les objets qu'il manipule, mais dans les règles et dans les relations que ces dernières créent entre ces objets. Hilbert se hasardait même à dire que les mathématiques auraient un sens le jour où le système se révélerait cohérent, c'est-à-dire dépourvu de contradiction.

La théorie de la preuve

Le programme de Hilbert - le formalisme - avait pour premier objectif la représentation des mathématiques sous forme d'un système axiomatique formel. Il espérait qu'en transformant ainsi les données mathématiques en chaînes de symboles abstraits, combinées selon les lois de la logique, tout raisonnement porteur de germe de paradoxe serait démasqué. Mieux encore, une fois les mathématiques formalisées, on pourrait entreprendre de démontrer leur cohérence. À cette fin, Hilbert introduisit une nouvelle théorie, la théorie de la preuve, où il était possible de formuler des énoncés signifiants à partir des signes et



4. LA CONJECTURE DE GOLDBACH énonce que tout entier naturel pair est la somme de deux nombres premiers. Bien que cette proposition reste non démontrée, il existe un procédé fiable pour savoir si un nombre pair donné est la somme de deux nombres premiers. On peut donc programmer un ordinateur pour qu'il examine chaque nombre pair séparément et qu'il inscrive un 0 si ce nombre est la somme de deux nombres premiers, et un 1 dans le cas contraire. L'ensemble des nombres pairs étant infini, la chaîne des 0 (avec peut-être des 1) l'est aussi. Est-il correct d'appliquer la loi aristotélicienne du tiers exclu à cette chaîne infinie, et de dire qu'elle renferme un 1 ou qu'elle n'en renferme pas? Le problème est qu'on ne saura peut-être jamais, faute de démonstration, laquelle de deux hypothèses est la bonne.

des configurations dénués de sens du système axiomatique. Cette métamathématique devait être entièrement constructive, voire «finitiste», par essence. Il devenait, par conséquent, impensable de mettre en doute la preuve métamathématique de la cohérence des mathématiques.

Brouwer refusa de croire que montrer la cohérence des mathématiques suffirait à leur redonner un sens et passa la majeure partie de sa vie à essayer de montrer que l'on pouvait «construire» les mathématiques. Son programme ne

fut guère populaire : les tentatives intuitionnistes étaient lourdes, artificielles et difficiles à utiliser. Quand Brouwer entreprit de débarrasser les mathématiques des notions idéales, tout en conservant certains aspects éprouvés de longue date, il fit appel à des notions qui parurent tout aussi idéalistes que celles qu'il éliminait.

Au total, ce n'est pas à cause d'une foi intense dans les mathématiques que les mathématiciens rejetèrent l'intuitionnisme, mais plutôt à cause de l'absence d'une telle foi. Beaucoup



5. L'AXIOME DU CHOIX, l'un des axiomes le plus utilisés et le plus controversés de la théorie des ensembles, admet que l'on peut toujours, partant d'une collection quelconque d'ensembles non vides, choisir un représentant dans chaque ensemble. Autrement dit, pour chacune des deux collections représentées ci-dessus, il devrait être possible d'indiquer une règle pour choisir des éléments, de sorte que deux personnes différentes opèrent les mêmes choix. Par exemple, pour la collection infinie de paires de chaussures, la loi «Choisissez la chaussure droite de chaque paire» est suffisante, car les deux chaussures sont dissemblables. Il n'existe pas de telle loi pour une collection infinie de paires de chaussettes toutes semblables.