

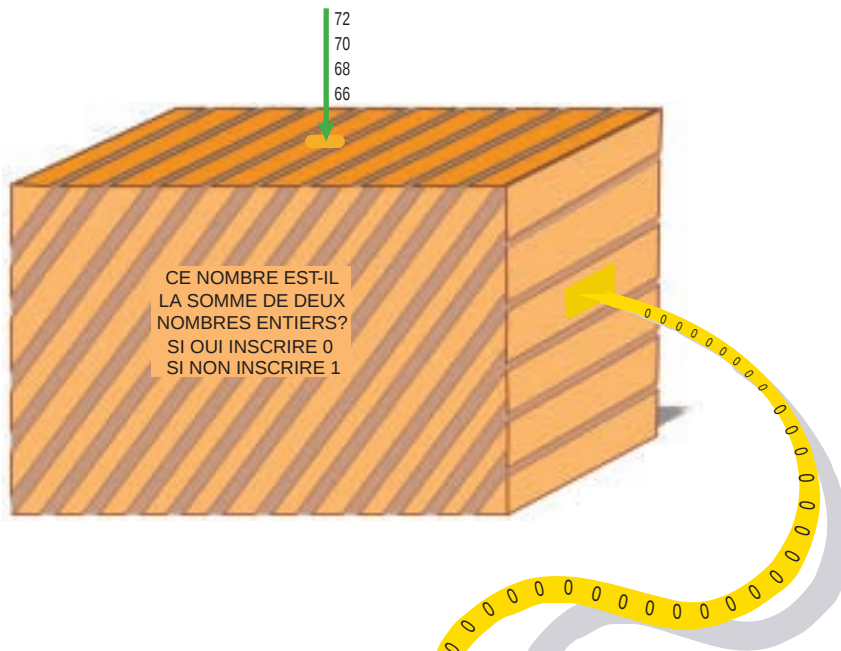
à celle de *U*. Des paradoxes de ce genre sapèrent les fondements des mathématiques ensemblistes et, selon Brouwer, les erreurs provenaient de l'introduction des objets idéaux en mathématiques.

Brouwer était convaincu que l'on résoudrait la crise des paradoxes si l'on rejetait objets et arguments idéaux, c'est-à-dire si l'on rebâtissait les mathématiques avec des méthodes exclusivement constructives. Comme ce programme, nommé intuitionnisme, aurait fait s'écrouler la presque totalité de l'édifice, il ne fut pas bien reçu, même de la part des mathématiciens ralliés à la cause de Brouwer. Ils étaient bien plus disposés à suivre le plan de Hilbert, qui ne cherchait pas à purifier les mathématiques du dedans, mais à les justifier du dehors. Ainsi les mathématiciens ne seraient pas, selon les propres mots de Hilbert, chassés du paradis que Cantor leur avait ouvert.

Hilbert croyait que, même si les objets idéaux n'avaient pas de signification propre, on pourrait en déduire des objets et des théorèmes importants et utiles. Selon lui, on pouvait espérer redonner un sens à la notion de certitude en transformant les mathématiques en un système axiomatique purement formel : une sorte de jeu dont l'intérêt résiderait non pas dans les objets qu'il manipule, mais dans les règles et dans les relations que ces dernières créent entre ces objets. Hilbert se hasardait même à dire que les mathématiques auraient un sens le jour où le système se révélerait cohérent, c'est-à-dire dépourvu de contradiction.

La théorie de la preuve

Le programme de Hilbert - le formalisme - avait pour premier objectif la représentation des mathématiques sous forme d'un système axiomatique formel. Il espérait qu'en transformant ainsi les données mathématiques en chaînes de symboles abstraits, combinées selon les lois de la logique, tout raisonnement porteur de germe de paradoxe serait démasqué. Mieux encore, une fois les mathématiques formalisées, on pourrait entreprendre de démontrer leur cohérence. À cette fin, Hilbert introduisit une nouvelle théorie, la théorie de la preuve, où il était possible de formuler des énoncés signifiants à partir des signes et



4. LA CONJECTURE DE GOLDBACH énonce que tout entier naturel pair est la somme de deux nombres premiers. Bien que cette proposition reste non démontrée, il existe un procédé fiable pour savoir si un nombre pair donné est la somme de deux nombres premiers. On peut donc programmer un ordinateur pour qu'il examine chaque nombre pair séparément et qu'il inscrive un 0 si ce nombre est la somme de deux nombres premiers, et un 1 dans le cas contraire. L'ensemble des nombres pairs étant infini, la chaîne des 0 (avec peut-être des 1) l'est aussi. Est-il correct d'appliquer la loi aristotélicienne du tiers exclu à cette chaîne infinie, et de dire qu'elle renferme un 1 ou qu'elle n'en renferme pas? Le problème est qu'on ne saura peut-être jamais, faute de démonstration, laquelle de deux hypothèses est la bonne.

des configurations dénués de sens du système axiomatique. Cette métamathématique devait être entièrement constructive, voire «finitiste», par essence. Il devenait, par conséquent, impensable de mettre en doute la preuve métamathématique de la cohérence des mathématiques.

Brouwer refusa de croire que montrer la cohérence des mathématiques suffirait à leur redonner un sens et passa la majeure partie de sa vie à essayer de montrer que l'on pouvait «construire» les mathématiques. Son programme ne

fut guère populaire : les tentatives intuitionnistes étaient lourdes, artificielles et difficiles à utiliser. Quand Brouwer entreprit de débarrasser les mathématiques des notions idéales, tout en conservant certains aspects éprouvés de longue date, il fit appel à des notions qui parurent tout aussi idéalistes que celles qu'il éliminait.

Au total, ce n'est pas à cause d'une foi intense dans les mathématiques que les mathématiciens rejetèrent l'intuitionnisme, mais plutôt à cause de l'absence d'une telle foi. Beaucoup



5. L'AXIOME DU CHOIX, l'un des axiomes le plus utilisés et le plus controversés de la théorie des ensembles, admet que l'on peut toujours, partant d'une collection quelconque d'ensembles non vides, choisir un représentant dans chaque ensemble. Autrement dit, pour chacune des deux collections représentées ci-dessus, il devrait être possible d'indiquer une règle pour choisir des éléments, de sorte que deux personnes différentes opèrent les mêmes choix. Par exemple, pour la collection infinie de paires de chaussures, la loi «Choisissez la chaussure droite de chaque paire» est suffisante, car les deux chaussures sont dissemblables. Il n'existe pas de telle loi pour une collection infinie de paires de chaussettes toutes semblables.

6. LA DÉFINITION DES NOMBRES RÉELS CONSTRUCTIFS.

La question est : pourquoi ne définit-on pas les nombres constructifs à partir des développements décimaux ?

L'idée la plus naturelle pour définir un nombre réel constructif consiste à dire que c'est un nombre réel pour lequel on connaît un moyen numérique (c'est-à-dire algorithmique) d'en calculer les décimales aussi loin qu'on le veut. Appelons un tel nombre «décimalement constructif».

En voici deux exemples x et y :

x est égal à 1, défini comme le nombre dont la suite des décimales est 1,0000 ...

y est égal à 0 si tout nombre pair est somme de deux nombres premiers (conjecture de Goldbach, non démontrée aujourd'hui) et est égal à $1/10^n$ sinon, en prenant pour n le plus petit entier tel que $2n$ ne s'écrit pas comme somme de deux nombres premiers.

Le nombre y est «décimalement constructif», car, si vous voulez connaître ses dix premières décimales, il suffit de vérifier que 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 s'écrivent chacun comme somme de deux nombres premiers (cinq minutes suffisent pour s'en assurer). Donc x est inférieur à $1/10^{10}$ et s'écrit 0,0000000000... : on connaît avec certitude les dix premiers chiffres décimaux de y .

Considérons maintenant $z = x - y$. Puis-je connaître ses 10 premières décimales ? Non. Sans savoir si la conjecture de Goldbach est vraie ou fausse, on ne peut même pas connaître la première décimale de z . En effet, si la conjecture de Goldbach est vraie, alors $z = 1$, alors que, si elle est fausse, $z = 0,99999...999990000...$, les 9 se prolongeant jusqu'au chiffre n correspondant à un contre-exemple, $2n$, de la conjecture.

Cela montre que la différence de deux nombres «décimalement constructifs» n'est pas nécessairement un nombre «décimalement constructif». C'est pourquoi on adopte, pour définir les nombres constructifs, une méthode ne se référant pas aux chiffres décimaux. Cette définition consiste à dire que x est un nombre réel constructif si l'on connaît un moyen numérique de l'approcher d'aussi près qu'on le veut par des nombres rationnels. Avec cette définition, les nombres x et y proposés ci-dessus sont des nombres réels constructifs, ainsi que $z = x - y$ (en vérifiant la conjecture de Goldbach jusqu'à 20, on en déduit que $0 \leq 1 - z < 1/10^{10}$). Plus généralement, avec la définition adoptée, la somme de deux nombres constructifs l'est, ainsi que leur différence ou leur produit, etc.

Il est amusant de noter qu'Alan Turing, dans son article fondateur de l'informatique théorique de 1936, introduisait la notion de nombre réel calculable en se référant aux décimales (comme nous l'avons fait pour les nombres «décimalement constructifs»). Quelques mois après, prenant conscience de ce que sa notion était malcommode (la différence de deux nombres calculables ne l'est pas nécessairement), il suggérait une modification de sa définition.

étaient inquiets de voir leur discipline perdre son sens véritable ; la seule manière de garder le bateau à flots leur parut être d'accepter certaines notions idéales. Citons encore Hilbert : «À côté de l'immense essor des mathématiques modernes, quel sens auraient ces pitoyables vestiges, maigres résultats isolés, incomplets et sans lien, obtenus par les intuitionnistes ? » Le formalisme de Hilbert offrait à beaucoup un compromis attirant. Si l'on pouvait montrer que les mathématiques ne contenaient aucune contradiction, on serait sûr que, si deux personnes (ou la même en deux occasions différentes) jouaient aux mathématiques, elles n'aboutiraient pas à deux réponses exactes opposées.

En 1931, Kurt Gödel montra que le programme formaliste de Hilbert était

voué à l'échec. Il prouva qu'aucune métamathématique ne permet de démontrer qu'un système formel d'axiomes est cohérent si ce système est suffisamment riche pour inclure une arithmétique élémentaire ; dans le meilleur des cas, on peut déterminer quand le système est incohérent. Entre-temps, la théorie des ensembles et le formalisme s'étaient tant imposés en mathématiques qu'il n'était plus question de les rejeter sous prétexte que la quête fondamentale du formalisme était une cause perdue.

Aussi le formalisme est-il devenu l'un des moteurs de la pensée mathématique, et l'intuitionnisme, une curiosité mathématique désuète. Les mathématiciens optent pour l'élégance des démonstrations d'existence pure (même quand ils ont à leur disposition des démonstrations constructives des

mêmes résultats), et le bien-fondé de telles mathématiques est rarement remis en cause. Quelques querelles subsistent au sujet de la théorie des ensembles (notamment l'emploi de l'axiome du choix, dont il sera question plus loin), mais la controverse sur les méthodes de la théorie ensembliste de Cantor et Hilbert est terminée.

Le constructivisme revisité

Le mathématicien Eric Bishop, en publiant en 1967 son livre, *Les fondements des mathématiques constructives*, raviva l'intérêt pour les mathématiques constructives. Contrairement à ses prédécesseurs, Bishop s'était appliqué à montrer que les résultats obtenus par des méthodes constructives peuvent être aussi élégants et puissants que ceux qui sont obtenus par des méthodes formalistes. Alors que Brouwer voulait construire les certitudes en mathématiques en partant d'un système d'axiomes intuitifs pour l'arithmétique et travailler en remontant, Bishop aborde la «constructivisation» des mathématiques selon une optique toute différente. Son but n'est pas de refonder les mathématiques, mais de les pratiquer de façon constructive ; ainsi son point de départ est l'ensemble des nombres rationnels, muni des opérations classiques, et il progresse de façon «réaliste» à partir de là. Selon Bishop, on peut atteindre la certitude en mathématique en rejetant toute notion «idéaliste» et en vérifiant en permanence que les objets ou théorèmes obtenus conservent un sens intuitif. Un grand nombre de résultats importants peuvent être obtenus par cette méthode directe.

Dans les mathématiques constructives de Bishop, la définition des nombres réels ou celle des fonctions doivent être repensées radicalement. Comme dans les mathématiques non constructives, un nombre réel est défini s'il peut être approché par des nombres rationnels arbitrairement proches. D'un point de vue constructif, on doit, pour que la définition de notre nombre réel soit considérée comme valide, donner un moyen effectif (fini) pour l'approcher par des nombres rationnels à n'importe quel degré de précision voulu. Autrement dit, il doit être possible, après un nombre fini d'étapes, d'obtenir un nombre rationnel qui approche le nombre réel en question avec la précision demandée. Cela n'est pas tou-