

6. LA DÉFINITION DES NOMBRES RÉELS CONSTRUCTIFS.

La question est : pourquoi ne définit-on pas les nombres constructifs à partir des développements décimaux ?

L'idée la plus naturelle pour définir un nombre réel constructif consiste à dire que c'est un nombre réel pour lequel on connaît un moyen numérique (c'est-à-dire algorithmique) d'en calculer les décimales aussi loin qu'on le veut. Appelons un tel nombre «décimalement constructif».

En voici deux exemples x et y :

x est égal à 1, défini comme le nombre dont la suite des décimales est 1,0000 ...

y est égal à 0 si tout nombre pair est somme de deux nombres premiers (conjecture de Goldbach, non démontrée aujourd'hui) et est égal à $1/10^n$ sinon, en prenant pour n le plus petit entier tel que $2n$ ne s'écrit pas comme somme de deux nombres premiers.

Le nombre y est «décimalement constructif», car, si vous voulez connaître ses dix premières décimales, il suffit de vérifier que 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 s'écrivent chacun comme somme de deux nombres premiers (cinq minutes suffisent pour s'en assurer). Donc x est inférieur à $1/10^{10}$ et s'écrit 0,0000000000... : on connaît avec certitude les dix premiers chiffres décimaux de y .

Considérons maintenant $z = x - y$. Puis-je connaître ses 10 premières décimales ? Non. Sans savoir si la conjecture de Goldbach est vraie ou fausse, on ne peut même pas connaître la première décimale de z . En effet, si la conjecture de Goldbach est vraie, alors $z = 1$, alors que, si elle est fausse, $z = 0,99999...99990000...$, les 9 se prolongeant jusqu'au chiffre n correspondant à un contre-exemple, $2n$, de la conjecture.

Cela montre que la différence de deux nombres «décimalement constructifs» n'est pas nécessairement un nombre «décimalement constructif». C'est pourquoi on adopte, pour définir les nombres constructifs, une méthode ne se référant pas aux chiffres décimaux. Cette définition consiste à dire que x est un nombre réel constructif si l'on connaît un moyen numérique de l'approcher d'autant près qu'on le veut par des nombres rationnels. Avec cette définition, les nombres x et y proposés ci-dessus sont des nombres réels constructifs, ainsi que $z = x - y$ (en vérifiant la conjecture de Goldbach jusqu'à 20, on en déduit que $0 \leq 1 - z < 1/10^{10}$). Plus généralement, avec la définition adoptée, la somme de deux nombres constructifs l'est, ainsi que leur différence ou leur produit, etc.

Il est amusant de noter qu'Alan Turing, dans son article fondateur de l'informatique théorique de 1936, introduisait la notion de nombre réel calculable en se référant aux décimales (comme nous l'avons fait pour les nombres «décimalement constructifs»). Quelques mois après, prenant conscience de ce que sa notion était malcommode (la différence de deux nombres calculables ne l'est pas nécessairement), il suggérait une modification de sa définition.

étaient inquiets de voir leur discipline perdre son sens véritable ; la seule manière de garder le bateau à flots leur parut être d'accepter certaines notions idéales. Citons encore Hilbert : «À côté de l'immense essor des mathématiques modernes, quel sens auraient ces pitoyables vestiges, maigres résultats isolés, incomplets et sans lien, obtenus par les intuitionnistes ? » Le formalisme de Hilbert offrait à beaucoup un compromis attirant. Si l'on pouvait montrer que les mathématiques ne contenaient aucune contradiction, on serait sûr que, si deux personnes (ou la même en deux occasions différentes) jouaient aux mathématiques, elles n'aboutiraient pas à deux réponses exactes opposées.

En 1931, Kurt Gödel montra que le programme formaliste de Hilbert était

voué à l'échec. Il prouva qu'aucune métamathématique ne permet de démontrer qu'un système formel d'axiomes est cohérent si ce système est suffisamment riche pour inclure une arithmétique élémentaire ; dans le meilleur des cas, on peut déterminer quand le système est incohérent. Entre-temps, la théorie des ensembles et le formalisme s'étaient tant imposés en mathématiques qu'il n'était plus question de les rejeter sous prétexte que la quête fondamentale du formalisme était une cause perdue.

Aussi le formalisme est-il devenu l'un des moteurs de la pensée mathématique, et l'intuitionnisme, une curiosité mathématique désuète. Les mathématiciens optent pour l'élégance des démonstrations d'existence pure (même quand ils ont à leur disposition des démonstrations constructives des

mêmes résultats), et le bien-fondé de telles mathématiques est rarement remis en cause. Quelques querelles subsistent au sujet de la théorie des ensembles (notamment l'emploi de l'axiome du choix, dont il sera question plus loin), mais la controverse sur les méthodes de la théorie ensembliste de Cantor et Hilbert est terminée.

Le constructivisme revisité

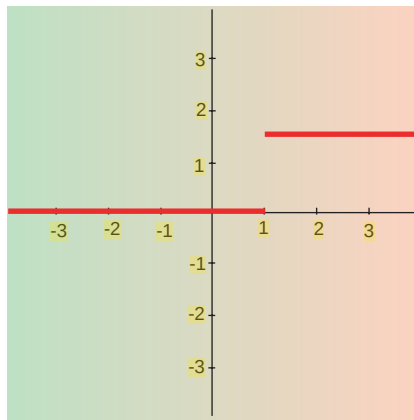
Le mathématicien Eric Bishop, en publiant en 1967 son livre, *Les fondements des mathématiques constructives*, raviva l'intérêt pour les mathématiques constructives. Contrairement à ses prédécesseurs, Bishop s'était appliqué à montrer que les résultats obtenus par des méthodes constructives peuvent être aussi élégants et puissants que ceux qui sont obtenus par des méthodes formalistes. Alors que Brouwer voulait construire les certitudes en mathématiques en partant d'un système d'axiomes intuitifs pour l'arithmétique et travailler en remontant, Bishop aborde la «constructivisation» des mathématiques selon une optique toute différente. Son but n'est pas de refonder les mathématiques, mais de les pratiquer de façon constructive ; ainsi son point de départ est l'ensemble des nombres rationnels, muni des opérations classiques, et il progresse de façon «réaliste» à partir de là. Selon Bishop, on peut atteindre la certitude en mathématique en rejetant toute notion «idéaliste» et en vérifiant en permanence que les objets ou théorèmes obtenus conservent un sens intuitif. Un grand nombre de résultats importants peuvent être obtenus par cette méthode directe.

Dans les mathématiques constructives de Bishop, la définition des nombres réels ou celle des fonctions doivent être repensées radicalement. Comme dans les mathématiques non constructives, un nombre réel est défini s'il peut être approché par des nombres rationnels arbitrairement proches. D'un point de vue constructif, on doit, pour que la définition de notre nombre réel soit considérée comme valide, donner un moyen effectif (fini) pour l'approcher par des nombres rationnels à n'importe quel degré de précision voulu. Autrement dit, il doit être possible, après un nombre fini d'étapes, d'obtenir un nombre rationnel qui approche le nombre réel en question avec la précision demandée. Cela n'est pas tou-

jours aussi facile qu'il peut le paraître : par exemple, se référer simplement aux développements décimaux poserait des problèmes insurmontables.

Une autre conséquence de la définition constructive que donne Bishop d'un ensemble est surprenante: il est impossible de décomposer l'ensemble des nombres réels en deux ensembles non vides n'ayant aucun élément en commun. Cette restriction sur le recouvrement de l'ensemble des nombres réels se répercute sur le type de fonctions à valeurs réelles que l'on peut définir constructivement. La construction proposée par Bishop repose sur l'utilisation des fonctions en escalier (voir la figure 7).

Les critères d'acceptabilité des mathématiques constructives étant plus rigoureux que ceux des mathématiques non constructives, tout théorème vérifié constructivement l'est aussi non constructivement. Néanmoins, deux théorèmes distincts constructivement peuvent avoir la même interprétation non constructive. D'un autre côté, on peut transformer n'importe quel théorème non constructif en un théorème constructif, à la condition d'ajouter «en supposant le principe du tiers exclu». De plus, des démonstrations non constructives peuvent être réinterprétées constructivement. Bishop affirmait qu'une fois les enseignements positifs de son programme tirés, les mathématiques actuelles, telles qu'elles sont pratiquées, sortiraient de leur isolement pour devenir une branche des mathématiques constructives. Néanmoins, la plupart des mathématiciens n'ont pas encore trouvé de raison suffisante pour changer radicalement la conception de leur recherche. Les mathématiques ont tant progressé que personne ne peut affirmer que le manque de réalité que leur reprochent les constructivistes soit bien fondé. Après tout, l'utilité des mathématiques dans le monde réel n'est plus à démontrer. Cette «bataille entre chats et chiens mathématiciens», comme disait Albert Einstein, apparaît dénuée de tout intérêt à nombre de scientifiques. En outre, les problèmes majeurs qui font évoluer les mathématiques sont d'ordre presque purement intuitif, interdisant ainsi de trop grands écarts par rapport à la réalité : la conviction que les mathématiques ne sont pas un jeu dénué de sens semble donc se confirmer.



7. LES FONCTIONS EN ESCALIER sont des fonctions très souvent appliquées aux nombres réels, mais qui ne peuvent être définies constructivement. En mathématiques constructives, une fonction sur les nombres réels est une loi qui associe à tout nombre réel r un autre nombre réel $f(r)$. Par exemple, la loi qui définit la fonction en escalier ci-dessus est : si r est inférieur à 1, $f(r)$ vaut 0, et si r est supérieur ou égal à 1, $f(r)$ vaut 1. Dans certains cas, il est possible de définir un nombre réel, sans pour autant pouvoir dire, au bout d'un nombre fini d'étapes, s'il est inférieur, supérieur ou égal à 1. Par conséquent, il est impossible d'attribuer la valeur 0 ou 1 à l'image de ce nombre.

Même si la révolution constructive n'est pas vraiment une révolution, il n'y a pas de doute possible sur le rôle déterminant que joueront à l'avenir les mathématiques constructives dans l'évolution de la discipline. Le récent engouement pour la «constructivisation» de certains résultats montre que, dans certains cas, il y a de gros avantages à prendre les problèmes sous cet angle nouveau. On y gagne non seulement une meilleure analyse, mais aussi des théorèmes plus puissants : ainsi, lorsque l'existence constructive d'un nombre a été mise en évidence, il peut être calculé, en pratique comme en théorie.

La majorité des mathématiciens d'aujourd'hui, formés au moule du formalisme depuis plusieurs générations, ne doutent du bien-fondé des mathématiques que lorsque l'on met à jour d'insurmontables contradictions inhérentes au système axiomatique formel des mathématiques. Même si les mathématiciens pensent que de telles contradictions peuvent éventuellement apparaître, ils restent certains de pouvoir remettre les choses au point par quelques modifications mineures des axiomes. Dans ces conditions, la question de savoir si les mathématiques abstraites ont un sens réel ou non ne peut même pas être formulée.

Aux mathématiciens qui en viendraient à douter de la validité de leur science, on répète le conseil que le philosophe français Jean d'Alembert, plagiant Pascal, donnait à ceux qui doutaient du calcul infinitésimal : «Continuez, et la foi viendra.»

Toutefois, Jean-Paul Delahaye a remarqué qu'aujourd'hui la physique utilise sans aucune retenue les mathématiques non constructives et en particulier les nombres réels qui sont sans réalité physique : en physique, aucune mesure n'est infiniment précise!

Les mathématiques du continu sont donc un instrument formel mal ajusté aux besoins véritables du physicien. Les mathématiques constructives lui conviendraient mieux, puisqu'elles ne manipulent que des objets finiment définis et que l'infini y est, en quelque sorte, toujours potentiel, comme dans le monde physique. Il est donc à prévoir que, dans un avenir plus ou moins lointain, les physiciens en viendront à utiliser les mathématiques constructives (ou certaines de leurs variantes) pour éviter d'avoir à utiliser les formalismes surdéterminants (qui en disent plus qu'on ne le souhaiterait) des mathématiques usuelles non constructives.

Préoccupés par bien d'autres choses, et effrayés par la difficulté des mathématiques constructives, très peu de physiciens ont étudié à ce jour cette possibilité d'affinement de leurs outils théoriques.

Allan CALDER est professeur à l'Université d'État du Nouveau-Mexique.

E. BISHOP, *The Foundations of Constructive Analysis*, McGraw-Hill, 1967.

E. BISHOP et D. BRIDGES, *Constructive Analysis*, Springer-Verlag, 1985

A.S. TROELSTRA et D. VAN DALEN, *Constructivism in Mathematics: an Introduction*, North-Holland, 1988.

M.J. BEESON, *Foundations of Constructive Mathematics: Metamathematical Studies*, Springer-Verlag Berlin/Heidelberg/New York, 1985.

M.B. POUR-EL et J.I. RICHARDS, *Computability in Analysis and Physics*, Springer-Verlag, 1989.

John MYHILL, *What is a Real Number?*, in *The American Mathematical Monthly*, vol. 79, n° 7, pp. 748-754.

I. LAKATOS, *A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics*, in *Mathematics, Science and Epistemology*, Cambridge University Press, 1978.
