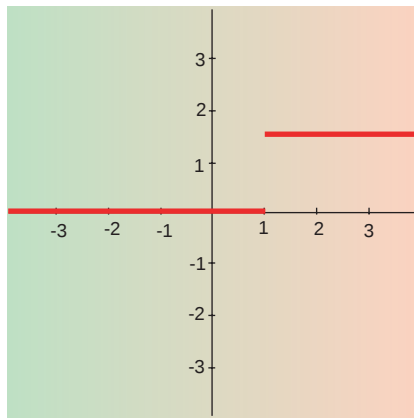


jours aussi facile qu'il peut le paraître : par exemple, se référer simplement aux développements décimaux poserait des problèmes insurmontables.

Une autre conséquence de la définition constructive que donne Bishop d'un ensemble est surprenante: il est impossible de décomposer l'ensemble des nombres réels en deux ensembles non vides n'ayant aucun élément en commun. Cette restriction sur le recouvrement de l'ensemble des nombres réels se répercute sur le type de fonctions à valeurs réelles que l'on peut définir constructivement. La construction proposée par Bishop repose sur l'utilisation des fonctions en escalier (voir la figure 7).

Les critères d'acceptabilité des mathématiques constructives étant plus rigoureux que ceux des mathématiques non constructives, tout théorème vérifié constructivement l'est aussi non constructivement. Néanmoins, deux théorèmes distincts constructivement peuvent avoir la même interprétation non constructive. D'un autre côté, on peut transformer n'importe quel théorème non constructif en un théorème constructif, à la condition d'ajouter «en supposant le principe du tiers exclu». De plus, des démonstrations non constructives peuvent être réinterprétées constructivement. Bishop affirmait qu'une fois les enseignements positifs de son programme tirés, les mathématiques actuelles, telles qu'elles sont pratiquées, sortiraient de leur isolement pour devenir une branche des mathématiques constructives. Néanmoins, la plupart des mathématiciens n'ont pas encore trouvé de raison suffisante pour changer radicalement la conception de leur recherche. Les mathématiques ont tant progressé que personne ne peut affirmer que le manque de réalité que leur reprochent les constructivistes soit bien fondé. Après tout, l'utilité des mathématiques dans le monde réel n'est plus à démontrer. Cette «bataille entre chats et chiens mathématiciens», comme disait Albert Einstein, apparaît dénuée de tout intérêt à nombre de scientifiques. En outre, les problèmes majeurs qui font évoluer les mathématiques sont d'ordre presque purement intuitif, interdisant ainsi de trop grands écarts par rapport à la réalité : la conviction que les mathématiques ne sont pas un jeu dénué de sens semble donc se confirmer.



7. LES FONCTIONS EN ESCALIER sont des fonctions très souvent appliquées aux nombres réels, mais qui ne peuvent être définies constructivement. En mathématiques constructives, une fonction sur les nombres réels est une loi qui associe à tout nombre réel r un autre nombre réel $f(r)$. Par exemple, la loi qui définit la fonction en escalier ci-dessus est : si r est inférieur à 1, $f(r)$ vaut 0, et si r est supérieur ou égal à 1, $f(r)$ vaut 1. Dans certains cas, il est possible de définir un nombre réel, sans pour autant pouvoir dire, au bout d'un nombre fini d'étapes, s'il est inférieur, supérieur ou égal à 1. Par conséquent, il est impossible d'attribuer la valeur 0 ou 1 à l'image de ce nombre.

Même si la révolution constructive n'est pas vraiment une révolution, il n'y a pas de doute possible sur le rôle déterminant que joueront à l'avenir les mathématiques constructives dans l'évolution de la discipline. Le récent engouement pour la «constructivisation» de certains résultats montre que, dans certains cas, il y a de gros avantages à prendre les problèmes sous cet angle nouveau. On y gagne non seulement une meilleure analyse, mais aussi des théorèmes plus puissants : ainsi, lorsque l'existence constructive d'un nombre a été mise en évidence, il peut être calculé, en pratique comme en théorie.

La majorité des mathématiciens d'aujourd'hui, formés au moule du formalisme depuis plusieurs générations, ne doutent du bien-fondé des mathématiques que lorsque l'on met à jour d'insurmontables contradictions inhérentes au système axiomatique formel des mathématiques. Même si les mathématiciens pensent que de telles contradictions peuvent éventuellement apparaître, ils restent certains de pouvoir remettre les choses au point par quelques modifications mineures des axiomes. Dans ces conditions, la question de savoir si les mathématiques abstraites ont un sens réel ou non ne peut même pas être formulée.

Aux mathématiciens qui en viendraient à douter de la validité de leur science, on répète le conseil que le philosophe français Jean d'Alembert, plagiant Pascal, donnait à ceux qui doutaient du calcul infinitésimal : «Continuez, et la foi viendra.»

Toutefois, Jean-Paul Delahaye a remarqué qu'aujourd'hui la physique utilise sans aucune retenue les mathématiques non constructives et en particulier les nombres réels qui sont sans réalité physique : en physique, aucune mesure n'est infiniment précise!

Les mathématiques du continu sont donc un instrument formel mal ajusté aux besoins véritables du physicien. Les mathématiques constructives lui conviendraient mieux, puisqu'elles ne manipulent que des objets finiment définis et que l'infini y est, en quelque sorte, toujours potentiel, comme dans le monde physique. Il est donc à prévoir que, dans un avenir plus ou moins lointain, les physiciens en viendront à utiliser les mathématiques constructives (ou certaines de leurs variantes) pour éviter d'avoir à utiliser les formalismes surdéterminants (qui en disent plus qu'on ne le souhaiterait) des mathématiques usuelles non constructives.

Préoccupés par bien d'autres choses, et effrayés par la difficulté des mathématiques constructives, très peu de physiciens ont étudié à ce jour cette possibilité d'affinement de leurs outils théoriques.

Allan CALDER est professeur à l'Université d'État du Nouveau-Mexique.

E. BISHOP, *The Foundations of Constructive Analysis*, McGraw-Hill, 1967.

E. BISHOP et D. BRIDGES, *Constructive Analysis*, Springer-Verlag, 1985

A.S. TROELSTRA et D. VAN DALEN, *Constructivism in Mathematics: an Introduction*, North-Holland, 1988.

M.J. BEESON, *Foundations of Constructive Mathematics: Metamathematical Studies*, Springer-Verlag Berlin/Heidelberg/New York, 1985.

M.B. POUR-EL et J.I. RICHARDS, *Computability in Analysis and Physics*, Springer-Verlag, 1989.

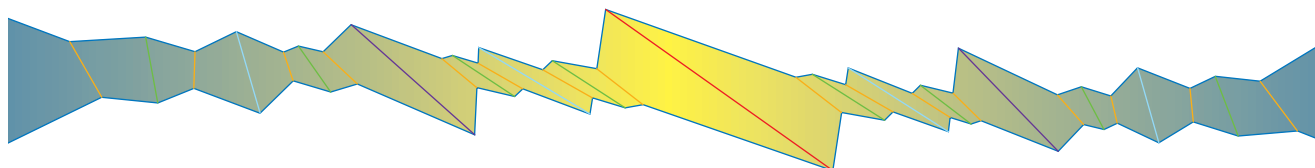
John MYHILL, *What is a Real Number?*, in *The American Mathematical Monthly*, vol. 79, n° 7, pp. 748-754.

I. LAKATOS, *A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics*, in *Mathematics, Science and Epistemology*, Cambridge University Press, 1978.

L'infini en géométrie

MARCEL BERGER

Lors d'un dîner, un géomètre recourt aux éléments du décor pour illustrer le rôle important de l'infini en géométrie : l'analyste et l'algébriste seront convaincus...



Au sortir de la conférence, l'algébriste, l'analyste et le géomètre, dignes représentants de la trinité des mathématiques, méditent la phrase d'Hermann Weyl : «Les mathématiques sont la science de l'infini.» L'algébriste, sûr de lui, dit qu'en algèbre l'infini est omniprésent. L'analyste répond qu'il en est de même dans sa discipline. Puis tous deux se tournent, perplexes, vers le géomètre, silencieux. Observé avec insistance, celui-ci affirme également : «Oh! c'est également vrai en géométrie.» Devant les regards interrogateurs de ses deux amis, il pour-

suit : «Bien sûr, la géométrie semble être bien installée à distance finie, les cas d'égalité des triangles ou la longueur d'un cercle égale à 2π fois le rayon en sont une illustration... Où donc se loge l'infini en géométrie? Partout! Puis-je vous proposer de vous le montrer devant un bon dîner?» Les deux autres, intrigués, acceptent. Sur le chemin, le géomètre énumère en silence les différents domaines de sa discipline dans lesquels l'infini joue un rôle important. Dans chacun d'eux, l'infini est présent sous trois aspects : lorsque l'on considère des objets en nombre infini ; quand on s'intéresse

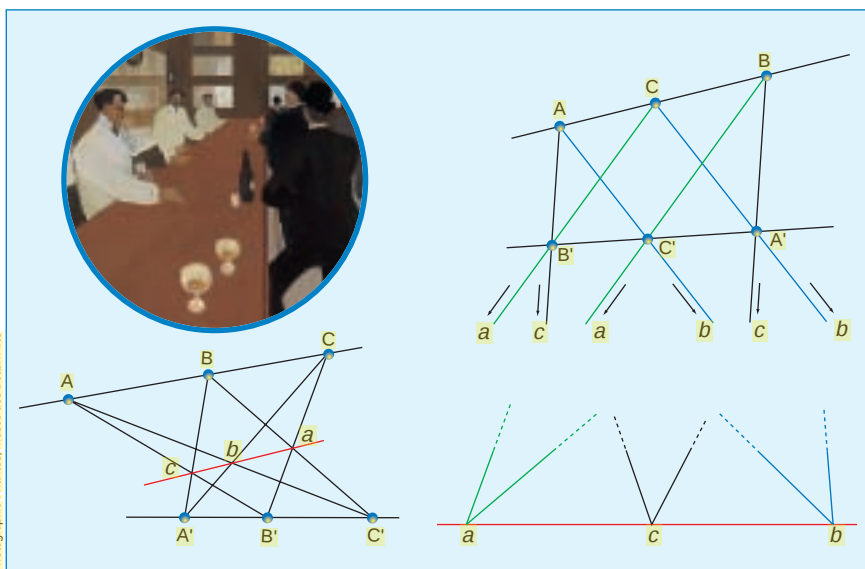
à des espaces de dimension infinie ; enfin, quand une opération est répétée un nombre infini de fois.

Nos trois mathématiciens franchissent le seuil de l'hôtel des Trois Faisans et patientent, alignés dans le corridor, en attendant l'hôtesse des lieux. Là, au bar, trois notaires passent le temps. Le géomètre ne peut manquer une telle occasion. «En guise d'introduction, vous voyez, messieurs, nous trois alignés ici, et ces trois hommes là-bas au bar, m'évoquent le théorème de Pappus (290 - 350), dont une démonstration aisée recourt à l'infini.»

L'infini selon Pappus

L'algébriste fouille sa mémoire : «Ce théorème n'affirme-t-il pas que, pour deux triplets de points alignés (A, B et C) et (A', B' et C') sur deux droites distinctes, les points d'intersection a de (BC') et $(B'C)$, b de (AC') et $(A'C)$ et c de (AB') et $(A'B)$ sont alignés (voir la figure 1)?»

Le géomètre confirme : «Exact, et la démonstration requiert de voir ce résultat dans un plan projectif, c'est-à-dire un plan affine (dans lequel les distances ne sont pas prises en compte), auquel on a adjoint une droite, dite à l'infini. Les points de cette droite sont les directions de toutes les droites du plan (voir *De la perspective à l'infini géométrique*, pages 66 à 72). Il n'y a plus de droites parallèles : celles qui l'étaient dans le plan seul sont maintenant sécantes en un point de la droite de l'infini. On décide, pour démontrer Pappus, que cette droite est la droite (ab) , ce que l'on peut toujours faire par une projection convenable. Ainsi, dans sa nouvelle



Photographie : Nantes, Musée des Beaux Arts

1. LE THÉORÈME DE PAPPUS affirme que les points d'intersection (a, b, c) des droites joignant convenablement les points de deux triplets alignés, (A, B, C) et (A', B', C') sont eux aussi alignés (à gauche). Ce théorème se démontre facilement avec l'infini : dans un plan dit projectif, on décide que les points de la droite (ab) , dite droite de l'infini, sont les directions de toutes les droites du plan ; deux droites parallèles sont alors sécantes en un point de cette droite. Puisque a et b sont sur cette droite, les droites (CB') et $(C'B)$ d'une part, et (AC') et $(A'C)$ d'autre part, sont parallèles. Démontrer le théorème de Pappus revient à montrer que le point c est aussi sur la droite de l'infini, donc que les droites (AB') et $(A'B)$ sont parallèles (à droite) ; le théorème de Thalès le montre aisément.

configuration, les droites (AC') et $(A'C)$ d'une part, et (BC') et $(B'C)$ d'autre part sont parallèles. Montrer que les points a , b et c sont alignés revient à montrer que le point c est aussi sur la droite de l'infini, c'est-à-dire que les droites de la troisième paire, (AB') et $(A'B)$, sont parallèles : le théorème de Thalès le montre aisément».

Après une petite réflexion, l'algébriste dit : «Oui, évidemment, cette démonstration est beaucoup plus simple que de se placer dans un repère et de calculer les coordonnées de tous les points.»

Enfin, tout trois assis devant leur table, la rondeur des assiettes et la circularité des verres inspirent le géomètre.

Des surfaces et des volumes

«Vous connaissez tous les deux cette méthode qui requiert l'infini pour calculer la longueur d'un cercle. On y inscrit un carré, puis, bâti sur ce carré, on construit un octogone régulier, dont on divise ensuite encore en deux chacun des huit côtés, afin d'avoir un polygone régulier à 16 côtés, etc. On calcule les longueurs successives de ces polygones et, à la limite, quand le nombre de côtés tend vers l'infini, on obtient la longueur du cercle. Grâce à une telle itération, on calcule aussi la longueur d'une courbe quelconque : on y inscrit des

polygones de côtés de plus en plus petits, et la longueur de la courbe est la limite à l'infini, quand elle existe, de la suite des longueurs de ces polygones.»

Je crois pourtant me souvenir, interromp l'algébriste, que l'on sait fabriquer des courbes de longueur infinie, même entre deux points quelconques de cette courbe.

Le géomètre reprend : «Oui, en revanche, on sait qu'il y a toujours une longueur lorsque la courbe est donnée par une équation suffisamment douce, c'est-à-dire que la courbe n'a pas de pic, ou, en termes plus mathématiques, qu'elle est dérivable en chaque point.

Dans un plan, pour calculer l'aire d'un triangle, on ajoute un second triangle égal, donc de même aire : du parallélogramme obtenu, on ôte d'un côté, et on ajoute de l'autre un triangle égal afin de former un rectangle dont l'aire est égale au produit de la longueur par la largeur. Ainsi, l'aire d'un triangle est égale au demi produit de la base par la hauteur.

Toutefois, le calcul du volume d'un polyèdre est plus subtil. Dans l'espace, on peut toujours décomposer un parallélépipède en tétraèdres ; cependant, on ne sait pas de façon évidente s'ils ont même volume, même s'ils ont la même hauteur et la même aire de base. Ils ne sont pas déduits l'un de l'autre par un déplacement. Pour montrer

qu'ils ont même volume, on recourt à l'infini : on découpe les tétraèdres en tranches horizontales de plus en plus fines ; chaque tranche contient un prisme et un morceau supplémentaire. Dans les deux tétraèdres, les prismes de deux tranches de même niveau ont le même volume, puisque l'aire de leur base est identique (voir la figure 5). Lorsque le nombre de prismes tend vers l'infini, la somme des volumes des morceaux restants devient négligeable : les tétraèdres ont donc même volume, car ils sont tous construits d'un nombre infini de prismes de même volume.

Ainsi, on ne procède pas dans l'espace de la même façon que dans le plan, par des raisonnements de découpage en un nombre fini de morceaux de volume égaux déduits les uns des autres par des transformations de l'espace. Inutile de rêver qu'un jour un génie trouvera un tel découpage, en 1903, Max Dehn (1878 - 1952) a démontré que ce rêve est impossible. Le cas du plan reste donc exceptionnel, l'espace nécessite l'infini.»

Et les cercles ?

La serveuse apporte alors les apéritifs et intervertit deux verres. Encouragé par l'abondance des cercles des verres des assiettes, des soucoupes... disposées sur la table, le géomètre saisit l'occasion



2. À L'HÔTEL DES TROIS FAISANS, on passe le temps, mais on parle aussi de l'infini en géométrie.