

configuration, les droites (AC') et (A'C) d'une part, et (BC') et (B'C) d'autre part sont parallèles. Montrer que les points a , b et c sont alignés revient à montrer que le point c est aussi sur la droite de l'infini, c'est-à-dire que les droites de la troisième paire, (AB') et (A'B), sont parallèles : le théorème de Thalès le montre aisément».

Après une petite réflexion, l'algébriste dit : «Oui, évidemment, cette démonstration est beaucoup plus simple que de se placer dans un repère et de calculer les coordonnées de tous les points.»

Enfin, tout trois assis devant leur table, la rondeur des assiettes et la circularité des verres inspirent le géomètre.

Des surfaces et des volumes

«Vous connaissez tous les deux cette méthode qui requiert l'infini pour calculer la longueur d'un cercle. On y inscrit un carré, puis, bâti sur ce carré, on construit un octogone régulier, dont on divise ensuite encore en deux chacun des huit côtés, afin d'avoir un polygone régulier à 16 côtés, etc. On calcule les longueurs successives de ces polygones et, à la limite, quand le nombre de côtés tend vers l'infini, on obtient la longueur du cercle. Grâce à une telle itération, on calcule aussi la longueur d'une courbe quelconque : on y inscrit des

polygones de côtés de plus en plus petits, et la longueur de la courbe est la limite à l'infini, quand elle existe, de la suite des longueurs de ces polygones.»

Je crois pourtant me souvenir, interrompt l'algébriste, que l'on sait fabriquer des courbes de longueur infinie, même entre deux points quelconques de cette courbe.

Le géomètre reprend : «Oui, en revanche, on sait qu'il y a toujours une longueur lorsque la courbe est donnée par une équation suffisamment douce, c'est-à-dire que la courbe n'a pas de pic, ou, en termes plus mathématiques, qu'elle est dérivable en chaque point.

Dans un plan, pour calculer l'aire d'un triangle, on ajoute un second triangle égal, donc de même aire : du parallélogramme obtenu, on ôte d'un côté, et on ajoute de l'autre un triangle égal afin de former un rectangle dont l'aire est égale au produit de la longueur par la largeur. Ainsi, l'aire d'un triangle est égale au demi produit de la base par la hauteur.

Toutefois, le calcul du volume d'un polyèdre est plus subtil. Dans l'espace, on peut toujours décomposer un parallélépipède en tétraèdres ; cependant, on ne sait pas de façon évidente s'ils ont même volume, même s'ils ont la même hauteur et la même aire de base. Ils ne sont pas déduits l'un de l'autre par un déplacement. Pour montrer

qu'ils ont même volume, on recourt à l'infini : on découpe les tétraèdres en tranches horizontales de plus en plus fines ; chaque tranche contient un prisme et un morceau supplémentaire. Dans les deux tétraèdres, les prismes de deux tranches de même niveau ont le même volume, puisque l'aire de leur base est identique (voir la figure 5). Lorsque le nombre de prismes tend vers l'infini, la somme des volumes des morceaux restants devient négligeable : les tétraèdres ont donc même volume, car ils sont tous construits d'un nombre infini de prismes de même volume.

Ainsi, on ne procède pas dans l'espace de la même façon que dans le plan, par des raisonnements de découpage en un nombre fini de morceaux de volume égaux déduits les uns des autres par des transformations de l'espace. Inutile de rêver qu'un jour un génie trouvera un tel découpage, en 1903, Max Dehn (1878 - 1952) a démontré que ce rêve est impossible. Le cas du plan reste donc exceptionnel, l'espace nécessite l'infini.»

Et les cercles ?

La serveuse apporte alors les apéritifs et intervertit deux verres. Encouragé par l'abondance des cercles des verres des assiettes, des soucoupes... disposées sur la table, le géomètre saisit l'occasion



Musée des Beaux-Arts de Nantes

2. À L'HÔTEL DES TROIS FAISANS, on passe le temps, mais on parle aussi de l'infini en géométrie.