

configuration, les droites (AC') et $(A'C)$ d'une part, et (BC') et $(B'C)$ d'autre part sont parallèles. Montrer que les points a , b et c sont alignés revient à montrer que le point c est aussi sur la droite de l'infini, c'est-à-dire que les droites de la troisième paire, (AB') et $(A'B)$, sont parallèles : le théorème de Thalès le montre aisément».

Après une petite réflexion, l'algébriste dit : «Oui, évidemment, cette démonstration est beaucoup plus simple que de se placer dans un repère et de calculer les coordonnées de tous les points.»

Enfin, tout trois assis devant leur table, la rondeur des assiettes et la circularité des verres inspirent le géomètre.

Des surfaces et des volumes

«Vous connaissez tous les deux cette méthode qui requiert l'infini pour calculer la longueur d'un cercle. On y inscrit un carré, puis, bâti sur ce carré, on construit un octogone régulier, dont on divise ensuite encore en deux chacun des huit côtés, afin d'avoir un polygone régulier à 16 côtés, etc. On calcule les longueurs successives de ces polygones et, à la limite, quand le nombre de côtés tend vers l'infini, on obtient la longueur du cercle. Grâce à une telle itération, on calcule aussi la longueur d'une courbe quelconque : on y inscrit des

polygones de côtés de plus en plus petits, et la longueur de la courbe est la limite à l'infini, quand elle existe, de la suite des longueurs de ces polygones.»

Je crois pourtant me souvenir, interrompt l'algébriste, que l'on sait fabriquer des courbes de longueur infinie, même entre deux points quelconques de cette courbe.

Le géomètre reprend : «Oui, en revanche, on sait qu'il y a toujours une longueur lorsque la courbe est donnée par une équation suffisamment douce, c'est-à-dire que la courbe n'a pas de pic, ou, en termes plus mathématiques, qu'elle est dérivable en chaque point.

Dans un plan, pour calculer l'aire d'un triangle, on ajoute un second triangle égal, donc de même aire : du parallélogramme obtenu, on ôte d'un côté, et on ajoute de l'autre un triangle égal afin de former un rectangle dont l'aire est égale au produit de la longueur par la largeur. Ainsi, l'aire d'un triangle est égale au demi produit de la base par la hauteur.

Toutefois, le calcul du volume d'un polyèdre est plus subtil. Dans l'espace, on peut toujours décomposer un parallélépipède en tétraèdres ; cependant, on ne sait pas de façon évidente s'ils ont même volume, même s'ils ont la même hauteur et la même aire de base. Ils ne sont pas déduits l'un de l'autre par un déplacement. Pour montrer

qu'ils ont même volume, on recourt à l'infini : on découpe les tétraèdres en tranches horizontales de plus en plus fines ; chaque tranche contient un prisme et un morceau supplémentaire. Dans les deux tétraèdres, les prismes de deux tranches de même niveau ont le même volume, puisque l'aire de leur base est identique (voir la figure 5). Lorsque le nombre de prismes tend vers l'infini, la somme des volumes des morceaux restants devient négligeable : les tétraèdres ont donc même volume, car ils sont tous construits d'un nombre infini de prismes de même volume.

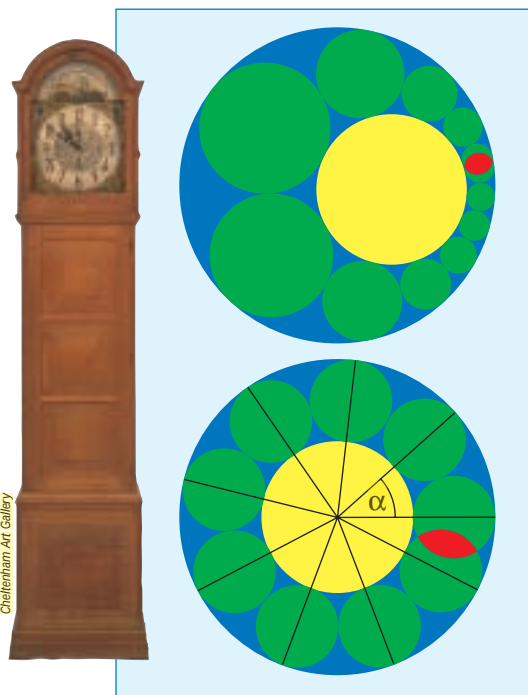
Ainsi, on ne procède pas dans l'espace de la même façon que dans le plan, par des raisonnements de découpage en un nombre fini de morceaux de volume égaux déduits les uns des autres par des transformations de l'espace. Inutile de rêver qu'un jour un génie trouvera un tel découpage, en 1903, Max Dehn (1878 - 1952) a démontré que ce rêve est impossible. Le cas du plan reste donc exceptionnel, l'espace nécessite l'infini.»

Et les cercles ?

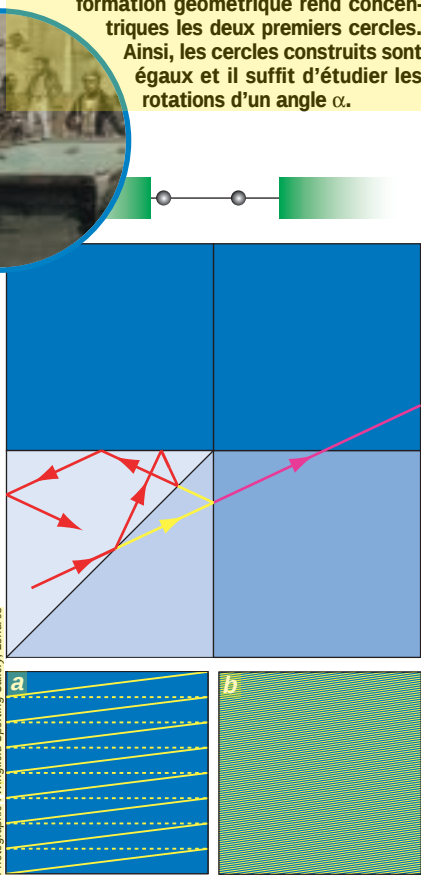
La serveuse apporte alors les apéritifs et intervertit deux verres. Encouragé par l'abondance des cercles des verres des assiettes, des soucoupes... disposées sur la table, le géomètre saisit l'occasion



2. À L'HÔTEL DES TROIS FAISANS, on passe le temps, mais on parle aussi de l'infini en géométrie.



3. L'ÉTUDE DES CERCLES (en vert) construits tangents à deux autres donnés (en haut) dont l'un est inclus dans l'autre (en bleu et en jaune) est évidente après une inversion : cette transformation géométrique rend concentriques les deux premiers cercles. Ainsi, les cercles construits sont égaux et il suffit d'étudier les rotations d'un angle α .



Photographie : Wingfield Spouting Gallery, Londres

4. LE COMPORTEMENT de deux particules qui rebondissent l'une contre l'autre sur un segment (à gauche, en haut) ou les rotations d'un angle dans un cercle (à droite) sont équivalents à des itérations d'une même opération. Dans le premier cas, la position des deux particules est représentée par un point dans un repère (un axe par particule). Puisqu'une particule ne peut pas passer par-dessus l'autre, la trajectoire de ce point est confinée dans un

et poursuit son exposé : « Avec la démonstration du théorème de Pappus, je vous ai montré que l'adjonction d'une droite à l'infini est parfaitement adaptée pour des problèmes de la géométrie des points et des droites. En revanche, elle n'est pas appropriée quand on s'intéresse à une géométrie de l'ensemble des cercles du plan euclidien, c'est-à-dire que l'on prend en compte la distance. La transformation du plan nommée inversion se révèle parfois pertinente. Elle consiste à se donner un point du plan, le centre d'inversion O . Tout point m autre que le centre est envoyé sur le point m' aligné avec O et m , et tel que le produit des longueurs $Om.Om'$ est constant : cette inversion transforme les cercles en cercles, sauf ceux passant par le centre O , qui sont transformés en droites.

À nouveau des itérations

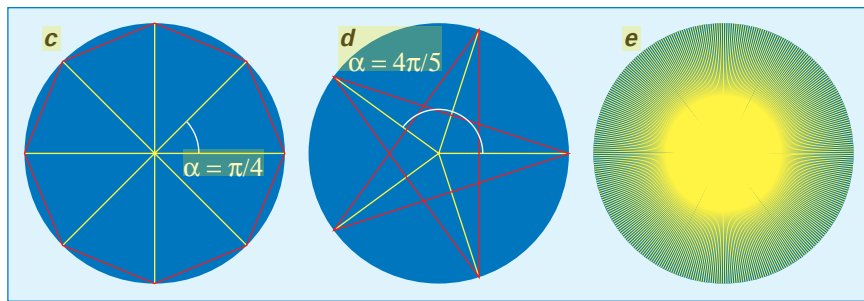
Grâce à cette inversion, l'étude de problèmes sur les cercles devient plus facile : par exemple, Jacob Steiner (1796-1863) a étudié le comportement de cercles tangents à deux autres donnés, le premier étant inclus dans le second (voir la figure 3). Un cercle est construit tangent aux deux premiers, le suivant est tangent aux trois précédents, et ainsi jusqu'à avoir parcouru le périmètre du cercle intérieur : le dernier cercle construit est-il tangent au premier construit, ou le chevauche-t-il ? Une judicieuse inversion rend concentriques les deux cercles donnés au départ. Les cercles ajoutés sont donc égaux, et il s'agit maintenant d'étudier le comportement de la droite joignant le centre des cercles concentriques (voir la figure 3) à celui de ceux construits : à chaque nouveau cercle, la droite pivote d'un angle constant.»

Le son d'un carillon ponctue le discours du géomètre, dont le regard est attiré par les aiguilles de l'horloge : « De la même façon que l'aiguille de cette horloge tourne à chaque minute...

... nous pouvons poursuivre avec l'étude de telles itérations. Quel est l'effet sur un point du cercle de l'itération d'une rotation d'angle donné α ? Quand $\alpha = 2\pi/k$ (k est un entier), les images successives d'un point de départ donné constituent les sommets d'un polygone régulier à k côtés inscrit dans le cercle, c'est le cas de la pendule pour laquelle $k = 60$; lorsque $\alpha = 2\pi p/q$, où p et q sont deux entiers premiers entre eux, le polygone obtenu est étoilé, à q côtés et tournant p fois (voir la figure 4). Mais que se passe-t-il quand k est un nombre irrationnel ? La trajectoire du point ne se refermera jamais, quel que soit le nombre d'itérations, même infini.

Toutefois, on peut en savoir plus. On montre que la trajectoire est partout et également dense dans le cercle : il y a une égale répartition des points « visités », aucune zone du cercle n'est négligée. En termes mathématiques, pour un ensemble infini $\{C_i\}_{i=1,2,3,\dots}$ de points du cercle, on dit qu'il y a égale répartition sur un arc m de longueur L du cercle lorsque, k tendant vers l'infini, la limite du nombre de points $C_{i(i=1,2,3,\dots,k)}$ qui sont sur l'arc m est toujours égale à $L/2\pi$ (si le cercle est de rayon unité), cela quel que soit l'arc m ».

L'analyste coupe ici le géomètre et lui demande, entre deux bouchées : « C'est bien joli, les itérations, mais elles restent des opérations discrètes. Or, dans la nature, un grand nombre de systèmes sont continus dans le temps. Les géomètres étudient-ils aussi ces phénomènes lorsque le temps continue très longtemps, c'est-à-dire tend vers l'infini ? »



triangle rectangle isocèle. On développe ce triangle dans un carré, puis dans le plan entier : la trajectoire est alors une droite infinie que l'on ramène dans un seul carré. Dans le second, on s'intéresse à la trajectoire d'un rayon du cercle. Certaines trajectoires sont périodiques (a, c et d), elles repassent par leur point de départ, d'autres, aperiodiques (b et e), approchent d'autant plus que l'on veut toutes les positions possibles.