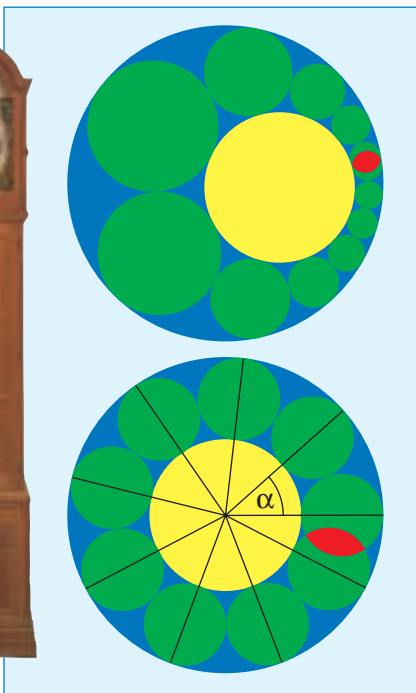
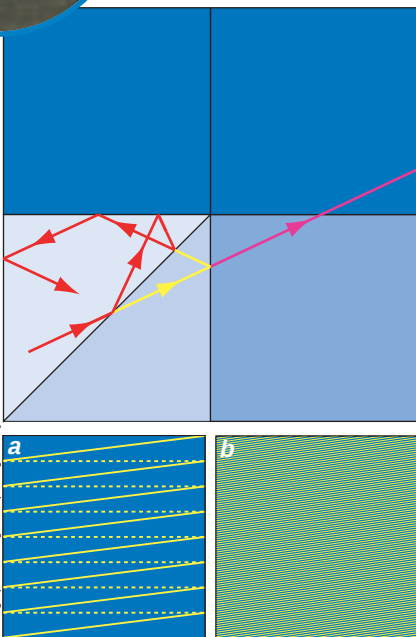




Cheltenham Art Gallery



3. L'ÉTUDE DES CERCLES (en vert) construits tangents à deux autres donnés (en haut) dont l'un est inclus dans l'autre (en bleu et en jaune) est évidente après une inversion : cette transformation géométrique rend concentriques les deux premiers cercles. Ainsi, les cercles construits sont égaux et il suffit d'étudier les rotations d'un angle α .



Photographie - Wingfield Sporting Gallery, Londres

4. LE COMPORTEMENT de deux particules qui rebondissent l'une contre l'autre sur un segment (à gauche, en haut) ou les rotations d'un angle dans un cercle (à droite) sont équivalents à des itérations d'une même opération. Dans le premier cas, la position des deux particules est représentée par un point dans un repère (un axe par particule). Puisqu'une particule ne peut pas passer par-dessus l'autre, la trajectoire de ce point est confinée dans un

et poursuit son exposé : «Avec la démonstration du théorème de Pappus, je vous ai montré que l'adjonction d'une droite à l'infini est parfaitement adaptée pour des problèmes de la géométrie des points et des droites. En revanche, elle n'est pas appropriée quand on s'intéresse à une géométrie de l'ensemble des cercles du plan euclidien, c'est-à-dire que l'on prend en compte la distance. La transformation du plan nommée inversion se révèle parfois pertinente. Elle consiste à se donner un point du plan, le centre d'inversion O . Tout point m autre que le centre est envoyé sur le point m' aligné avec O et m , et tel que le produit des longueurs $Om.Om'$ est constant : cette inversion transforme les cercles en cercles, sauf ceux passant par le centre O , qui sont transformés en droites.

À nouveau des itérations

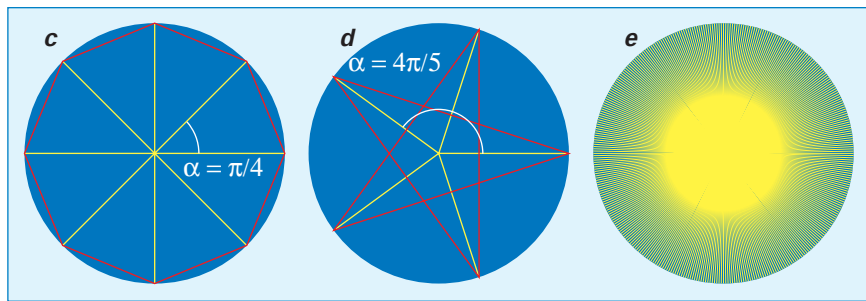
Grâce à cette inversion, l'étude de problèmes sur les cercles devient plus facile : par exemple, Jacob Steiner (1796-1863) a étudié le comportement de cercles tangents à deux autres donnés, le premier étant inclus dans le second (voir la figure 3). Un cercle est construit tangent aux deux premiers, le suivant est tangent aux trois précédents, et ainsi jusqu'à avoir parcouru le périmètre du cercle intérieur : le dernier cercle construit est-il tangent au premier construit, ou le chevauche-t-il ? Une judicieuse inversion rend concentriques les deux cercles donnés au départ. Les cercles ajoutés sont donc égaux, et il s'agit maintenant d'étudier le comportement de la droite joignant le centre des cercles concentriques (voir la figure 3) à celui de ceux construits : à chaque nouveau cercle, la droite pivote d'un angle constant.»

Le son d'un carillon ponctue le discours du géomètre, dont le regard est attiré par les aiguilles de l'horloge : «De la même façon que l'aiguille de cette horloge tourne à chaque minute...

...nous pouvons poursuivre avec l'étude de telles itérations. Quel est l'effet sur un point du cercle de l'itération d'une rotation d'angle donné α ? Quand $\alpha = 2\pi/k$ (k est un entier), les images successives d'un point de départ donné constituent les sommets d'un polygone régulier à k côtés inscrit dans le cercle, c'est le cas de la pendule pour laquelle $k = 60$; lorsque $\alpha = 2\pi p/q$, où p et q sont deux entiers premiers entre eux, le polygone obtenu est étoilé, à q côtés et tournant p fois (voir la figure 4). Mais que se passe-t-il quand k est un nombre irrationnel ? La trajectoire du point ne se referme jamais, quel que soit le nombre d'itérations, même infini.

Toutefois, on peut en savoir plus. On montre que la trajectoire est partout et également dense dans le cercle : il y a une égale répartition des points «visités», aucune zone du cercle n'est négligée. En termes mathématiques, pour un ensemble infini $\{C_i\}_{i=1,2,3,\dots}$ de points du cercle, on dit qu'il y a égale répartition sur un arc m de longueur L du cercle lorsque, k tendant vers l'infini, la limite du nombre de points $C_{i(i=1,2,3,\dots,k)}$ qui sont sur l'arc m est toujours égale à $L/2\pi$ (si le cercle est de rayon unité), cela quel que soit l'arc m .)

L'analyste coupe ici le géomètre et lui demande, entre deux bouchées : «C'est bien joli, les itérations, mais elles restent des opérations discrètes. Or, dans la nature, un grand nombre de systèmes sont continus dans le temps. Les géomètres étudient-ils aussi ces phénomènes lorsque le temps continue très longtemps, c'est-à-dire tend vers l'infini ?»



triangle rectangle isocèle. On développe ce triangle dans un carré, puis dans le plan entier : la trajectoire est alors une droite infinie que l'on ramène dans un seul carré. Dans le second, on s'intéresse à la trajectoire d'un rayon du cercle. Certaines trajectoires sont périodiques (a, c et d), elles repassent par leur point de départ, d'autres, aperiodiques (b et e), approchent d'autant plus que l'on veut toutes les positions possibles.

«Bien sûr! Le billard que j'aperçois là-bas m'inspire. En mécanique, on étudie le mouvement de deux particules de même masse sur un intervalle. Ces particules repartent en sens inverse avec la même vitesse quand elles se rencontrent. Quand on représente la position des deux particules par un point du plan, (les deux axes représentent chacun les positions d'une particule), la trajectoire de celui-ci, confinée dans un triangle rectangle isocèle, est celle d'une boule de billard qui se réfléchit sur les côtés avec un angle d'incidence égal à l'angle de réflexion par rapport à la normale, la droite perpendiculaire au côté. Nous simplifions le problème en développant la trajectoire par symétrie : le billard devient alors un carré (voir la figure 4). Puis, quand on développe la symétrie dans le plan tout entier, la trajectoire devient une droite infinie.

Vous remarquerez qu'il suffit de savoir ce qui se passe là où la trajectoire rencontre un bord du carré : le problème est alors de nouveau celui de l'itération d'un même procédé. Ici donc, deux cas se distinguent selon que la pente, qui est le rapport des vitesses initiales des deux particules, est en rapport rationnel ou irrationnel avec la longueur du carré (la longueur de l'intervalle).

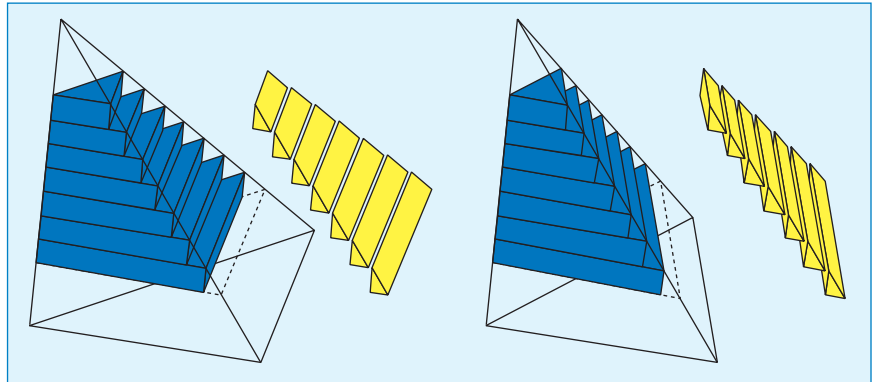
Dans le cas irrationnel, la trajectoire est partout dense et également répartie, c'est-à-dire que les deux particules occuperont toutes les positions possibles, et ce de façon équitablement répartie dans le temps. Sur un ordinateur, la trajectoire noircira l'écran de plus en plus, et de façon partout identique. Seule varie la vitesse de remplissage de l'écran. Dans le cas rationnel, la trajectoire est périodique ; après un temps, le mouvement reprend comme au départ : l'écran est seulement biffé de quelques lignes.»

L'algébriste et l'analyste, songeurs, demandent alors : «Que se passe-t-il pour deux particules de masses différentes?»

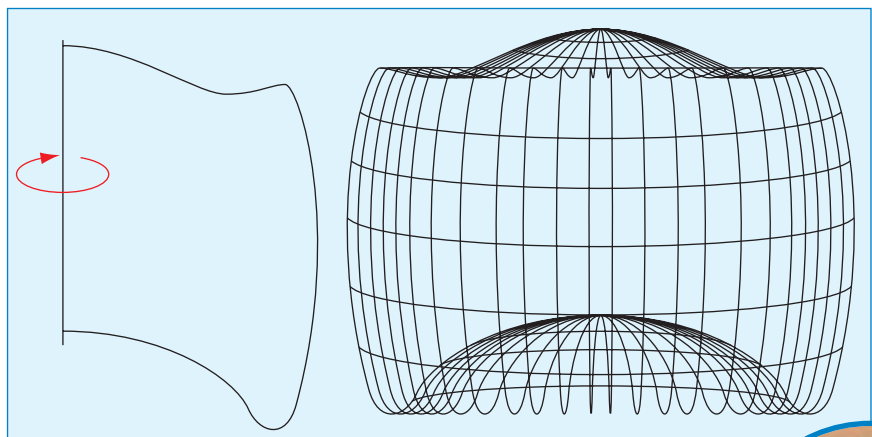
La réponse est immédiate : «Un calcul du choc élastique de particules de masses différentes, en tenant compte de la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement, montre que le problème devient alors celui du billard dans un triangle rectangle, mais non isocèle. Ici, les géomètres n'ont que peu de résultats, car ils ne peuvent plus développer le triangle en un pavage de carrés. Le résultat dépend essentiellement du rapport des masses ; plus précisément, il s'agit de savoir quand l'angle α (un des angles du triangle), dont la tangente

est égale au produit des racines carrées des deux masses, est en rapport rationnel ou non avec π . Dans le cas rationnel, les trajectoires sont de trois types : dans des cas rares, elles sont périodiques ;

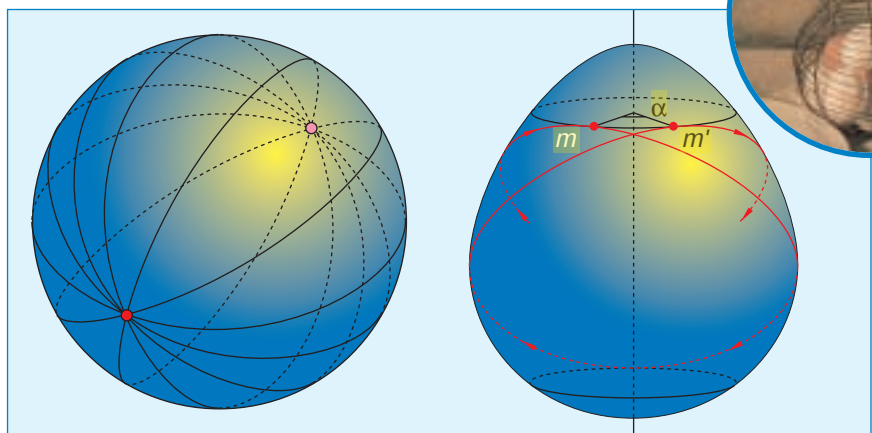
d'autres sont partout denses et bien réparties, c'est-à-dire qu'une zone du billard ne sera pas remplie avant une autre ; enfin, le plus souvent, elles sont partout denses, mais mal réparties. Dans



5. EN DÉCOUPANT DEUX TÉTRAÈDRES de même hauteur et de même aire de base en tranches, on montre qu'ils ont le même volume. Les tranches sont composées d'un prisme (en bleu) et d'un bout restant (en jaune). Dans chaque tétraèdre, les prismes du même niveau, ont un volume égal. Lorsque le nombre de prismes est infini, le volume des bouts restants est égal à zéro : les tétraèdres ont donc même volume.



6. LES SURFACES DE ZOLL sont des surfaces de révolution dont, à l'instar de la sphère, toutes les trajectoires d'une particule lancée à la surface sont des géodésiques périodiques.



7. SUR UNE SPHÈRE (à gauche), toutes les trajectoires d'une particule lancée sur la surface sans frottements et sans gravité sont des géodésiques périodiques : ce sont les grands cercles. Sur une surface de révolution (à droite), telle celle d'un œuf, les trajectoires (en rouge) sont des géodésiques périodiques pourvu qu'à partir d'un point m d'un parallèle quelconque (en noir), elles repassent sur ce même parallèle par un point m' décalé de m d'un angle α en rapport rationnel avec 2π .

tous les cas, les directions prises par une trajectoire en chaque point du billard sont en nombre fini : le système n'est donc pas ergodique en phase. Cependant, il est ergodique en position, car la trajectoire passe par tous les points. Par ailleurs, on sait que l'ordre de grandeur du nombre de trajectoires périodiques de longueur inférieure ou égale à une distance donnée croît avec le carré de la longueur de l'intervalle.»

L'analyste coupe le géomètre : «Et dans le cas irrationnel?»

«J'y venais. À partir de l'étude du cas rationnel et en approximant les triangles à angle irrationnel par de nombreux triangles à angle rationnel, on montre que l'ergodicité de phase est obtenue à l'aide de la seule ergodicité d'espace du cas rationnel. Cependant, c'est une existence complètement abstraite! On ne connaît aucune valeur de m et de m' qui permette de vérifier cette assertion. D'autre part, on ne connaît pas l'ordre de grandeur du nombre de trajectoires périodiques de longueur inférieure ou égale à une distance donnée.»

rieure ou égale à une distance donnée.»

Le géomètre, intarissable, se remémorait les différents domaines de sa discipline où les itérations sont indispensables : «Puisque nous parlons d'itérations, une autre apparaît également dans la démonstration de l'inégalité isopérimétrique qui affirme que, parmi toutes les courbes fermées de longueur donnée, le cercle est celle qui entoure la plus grande aire. La démonstration de Wilhelm Blaschke (1885 - 1952), dans les années 1920, utilise une opération appelée symétrisation de Steiner (voir la figure 8). À partir d'un domaine dont le périmètre est une courbe quelconque, cette opération consiste, pour une direction donnée du plan, à découper le domaine en tranches infiniment fines, puis à enfiler les tranches symétriquement autour d'un axe perpendiculaire à la direction donnée. Le domaine obtenu est de même aire, mais de périmètre plus petit que celui du domaine initial. Cette réduction de périmètre est due à une propriété des trapèzes, auxquels les tranches sont assimilées : le périmètre

d'un trapèze est minimal quand les deux côtés opposés non parallèles ont même longueur.»

L'algébriste confirme qu'un rapide calcul le montre.

Encore et toujours des itérations

Le géomètre poursuit, imperturbable : «L'itération de ces symétrisations avec infiniment de directions différentes a une limite : c'est un cercle, car lui seul est symétrique dans toutes les directions. De surcroît, la symétrisation fonctionne en toute dimension.»

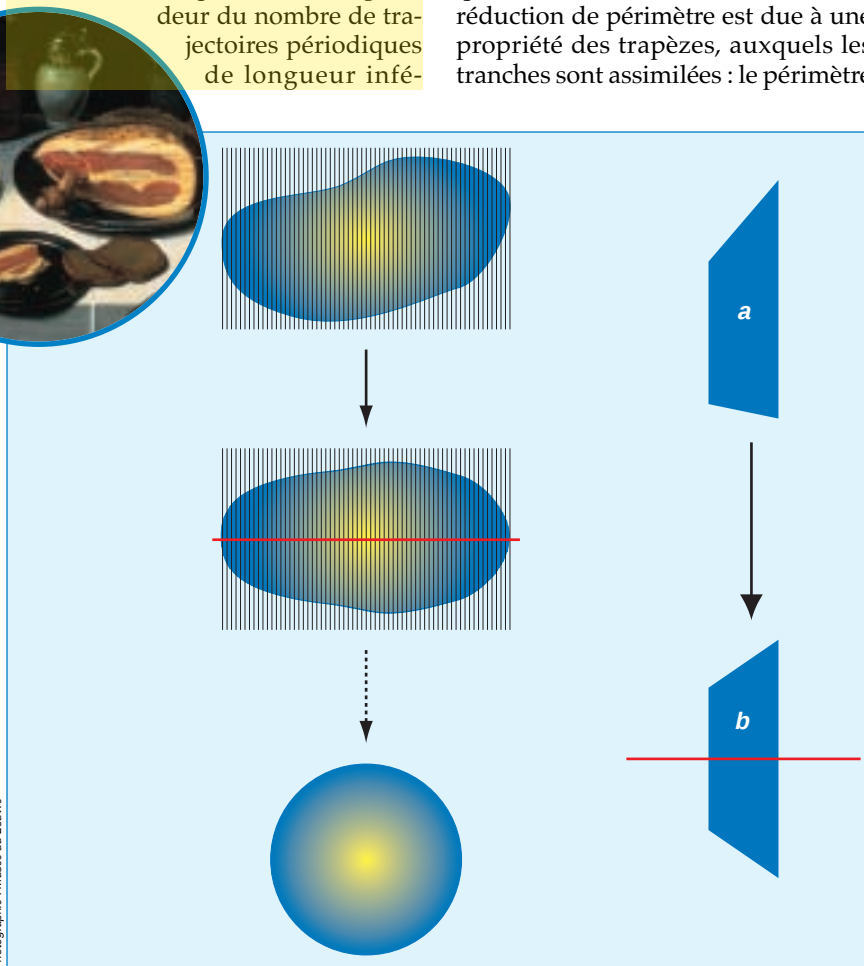
L'analyste et l'algébriste demandent alors : «Existerait-il une méthode plus naturelle pour minimiser le rapport de la longueur de la courbe frontière sur l'aire intérieure d'un domaine D ?»

Le géomètre répond : «Dans la réalité, on étudie plutôt le rapport du carré de la longueur sur l'aire pour manipuler des nombres sans dimensions. Il faut d'abord prouver l'existence d'une limite – une courbe – à ce rapport. Dans le plan, cette existence est démontrée. Toutefois, ce problème d'existence est à considérer ici dans l'espace infini de toutes les courbes : jusque dans les années 1960, dans des espaces de dimensions infinies, aucun théorème d'existence d'objets limites au sein de familles d'objets géométriques, telles les courbes, et de limites de variables elles aussi géométriques, telle l'aire d'un domaine, n'était disponible. Ce n'est qu'à la suite des travaux d'Herbert Federer, alors à l'Université Brown, qui constituent la théorie géométrique de la mesure, que l'existence de telles limites a été prouvée. On conclut alors, et ce en dimension quelconque, que la limite est, en deux dimensions, un disque, et, au-delà, une boule.

Puisque nous évoquons la démonstration de l'inégalité isopérimétrique, nous pouvons aussi penser l'augmentation du rapport du carré de la longueur sur l'aire, non plus par l'opération de symétrisation, mais par une transformation continue, c'est-à-dire la déformation d'une courbe C en une courbe de plus en plus proche d'un cercle. Pour ce faire, on se souvient que les cercles sont des courbes dont la courbure est constante.»

L'algébriste interrompt ici le géomètre : «Tu peux nous rappeler ce qu'un géomètre entend par courbure?»

«Bien sûr! Pour déterminer la cour-



Photographie : Musée du Louvre

8. LA SYMÉTRISATION d'un domaine réduit son périmètre en maintenant son aire constante. On découpe le domaine initial en tranches infiniment fines (à gauche), puis on rassemble ces tranches symétriquement selon un axe perpendiculaire à celui des tranches. Lorsque cette opération est itérée un nombre infini de fois, le domaine tend vers un cercle qui minimise le périmètre. Celui-ci diminue en vertu d'une propriété des trapèzes de même aire (à droite) : le périmètre du trapèze b , symétrique, est inférieur à celui du trapèze a .