

tous les cas, les directions prises par une trajectoire en chaque point du billard sont en nombre fini : le système n'est donc pas ergodique en phase. Cependant, il est ergodique en position, car la trajectoire passe par tous les points. Par ailleurs, on sait que l'ordre de grandeur du nombre de trajectoires périodiques de longueur inférieure ou égale à une distance donnée croît avec le carré de la longueur de l'intervalle.»

L'analyste coupe le géomètre : «Et dans le cas irrationnel?»

«J'y venais. À partir de l'étude du cas rationnel et en approximant les triangles à angle irrationnel par de nombreux triangles à angle rationnel, on montre que l'ergodicité de phase est obtenue à l'aide de la seule ergodicité d'espace du cas rationnel. Cependant, c'est une existence complètement abstraite ! On ne connaît aucune valeur de m et de m' qui permette de vérifier cette assertion. D'autre part, on ne connaît pas l'ordre de grandeur du nombre de trajectoires périodiques de longueur inférieure ou égale à une distance donnée.»

rieure ou égale à une distance donnée.»

Le géomètre, intarissable, se remémorait les différents domaines de sa discipline où les itérations sont indispensables : «Puisque nous parlons d'itérations, une autre apparaît également dans la démonstration de l'inégalité isopérimétrique qui affirme que, parmi toutes les courbes fermées de longueur donnée, le cercle est celle qui entoure la plus grande aire. La démonstration de Wilhelm Blaschke (1885 - 1952), dans les années 1920, utilise une opération appelée symétrisation de Steiner (voir la figure 8). À partir d'un domaine dont le périmètre est une courbe quelconque, cette opération consiste, pour une direction donnée du plan, à découper le domaine en tranches infiniment fines, puis à enfiler les tranches symétriquement autour d'un axe perpendiculaire à la direction donnée. Le domaine obtenu est de même aire, mais de périmètre plus petit que celui du domaine initial. Cette réduction de périmètre est due à une propriété des trapèzes, auxquels les tranches sont assimilées : le périmètre

d'un trapèze est minimal quand les deux côtés opposés non parallèles ont même longueur.»

L'algébriste confirme qu'un rapide calcul le montre.

Encore et toujours des itérations

Le géomètre poursuit, imperturbable : «L'itération de ces symétrisations avec infiniment de directions différentes a une limite : c'est un cercle, car lui seul est symétrique dans toutes les directions. De surcroît, la symétrisation fonctionne en toute dimension.»

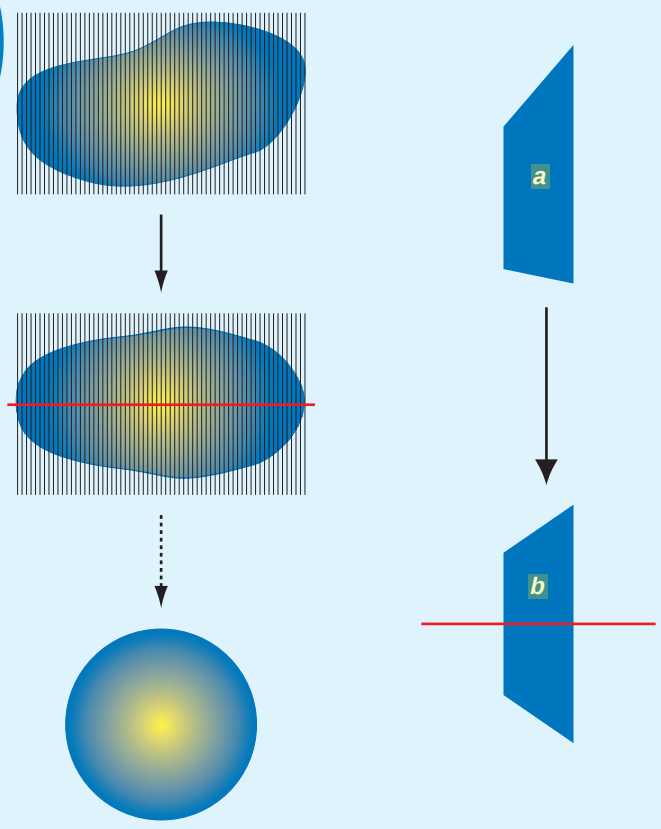
L'analyste et l'algébriste demandent alors : «Existerait-il une méthode plus naturelle pour minimiser le rapport de la longueur de la courbe frontière sur l'aire intérieure d'un domaine D ?»

Le géomètre répond : «Dans la réalité, on étudie plutôt le rapport du carré de la longueur sur l'aire pour manipuler des nombres sans dimensions. Il faut d'abord prouver l'existence d'une limite – une courbe – à ce rapport. Dans le plan, cette existence est démontrée. Toutefois, ce problème d'existence est à considérer ici dans l'espace infini de toutes les courbes : jusque dans les années 1960, dans des espaces de dimensions infinies, aucun théorème d'existence d'objets limites au sein de familles d'objets géométriques, telles les courbes, et de limites de variables elles aussi géométriques, telle l'aire d'un domaine, n'était disponible. Ce n'est qu'à la suite des travaux d'Herbert Federer, alors à l'Université Brown, qui constituent la théorie géométrique de la mesure, que l'existence de telles limites a été prouvée. On conclut alors, et ce en dimension quelconque, que la limite est, en deux dimensions, un disque, et, au-delà, une boule.

Puisque nous évoquons la démonstration de l'inégalité isopérimétrique, nous pouvons aussi penser l'augmentation du rapport du carré de la longueur sur l'aire, non plus par l'opération de symétrisation, mais par une transformation continue, c'est-à-dire la déformation d'une courbe C en une courbe de plus en plus proche d'un cercle. Pour ce faire, on se souvient que les cercles sont des courbes dont la courbure est constante.»

L'algébriste interrompt ici le géomètre : «Tu peux nous rappeler ce qu'un géomètre entend par courbure?»

«Bien sûr ! Pour déterminer la cour-



Photographie : Musée du Louvre

8. LA SYMÉTRISATION d'un domaine réduit son périmètre en maintenant son aire constante. On découpe le domaine initial en tranches infiniment fines (à gauche), puis on rassemble ces tranches symétriquement selon un axe perpendiculaire à celui des tranches. Lorsque cette opération est itérée un nombre infini de fois, le domaine tend vers un cercle qui minimise le périmètre. Celui-ci diminue en vertu d'une propriété des trapèzes de même aire (à droite) : le périmètre du trapèze b , symétrique, est inférieur à celui du trapèze a .