

tous les cas, les directions prises par une trajectoire en chaque point du billard sont en nombre fini : le système n'est donc pas ergodique en phase. Cependant, il est ergodique en position, car la trajectoire passe par tous les points. Par ailleurs, on sait que l'ordre de grandeur du nombre de trajectoires périodiques de longueur inférieure ou égale à une distance donnée croît avec le carré de la longueur de l'intervalle.»

L'analyste coupe le géomètre : «Et dans le cas irrationnel?»

«J'y venais. À partir de l'étude du cas rationnel et en approximant les triangles à angle irrationnel par de nombreux triangles à angle rationnel, on montre que l'ergodicité de phase est obtenue à l'aide de la seule ergodicité d'espace du cas rationnel. Cependant, c'est une existence complètement abstraite ! On ne connaît aucune valeur de m et de m' qui permette de vérifier cette assertion. D'autre part, on ne connaît pas l'ordre de grandeur du nombre de trajectoires périodiques de longueur inférieure ou égale à une distance donnée.»

Le géomètre, intarissable, se remémorait les différents domaines de sa discipline où les itérations sont indispensables : «Puisque nous parlons d'itérations, une autre apparaît également dans la démonstration de l'inégalité isopérimétrique qui affirme que, parmi toutes les courbes fermées de longueur donnée, le cercle est celle qui entoure la plus grande aire. La démonstration de Wilhelm Blaschke (1885 - 1952), dans les années 1920, utilise une opération appelée symétrisation de Steiner (voir la figure 8). À partir d'un domaine dont le périmètre est une courbe quelconque, cette opération consiste, pour une direction donnée du plan, à découper le domaine en tranches infiniment fines, puis à enfilier les tranches symétriquement autour d'un axe perpendiculaire à la direction donnée. Le domaine obtenu est de même aire, mais de périmètre plus petit que celui du domaine initial. Cette réduction de périmètre est due à une propriété des trapèzes, auxquels les tranches sont assimilées : le périmètre

d'un trapèze est minimal quand les deux côtés opposés non parallèles ont même longueur.»

L'algébriste confirme qu'un rapide calcul le montre.

Encore et toujours des itérations

Le géomètre poursuit, imperturbable : «L'itération de ces symétrisations avec infiniment de directions différentes a une limite : c'est un cercle, car lui seul est symétrique dans toutes les directions. De surcroît, la symétrisation fonctionne en toute dimension.»

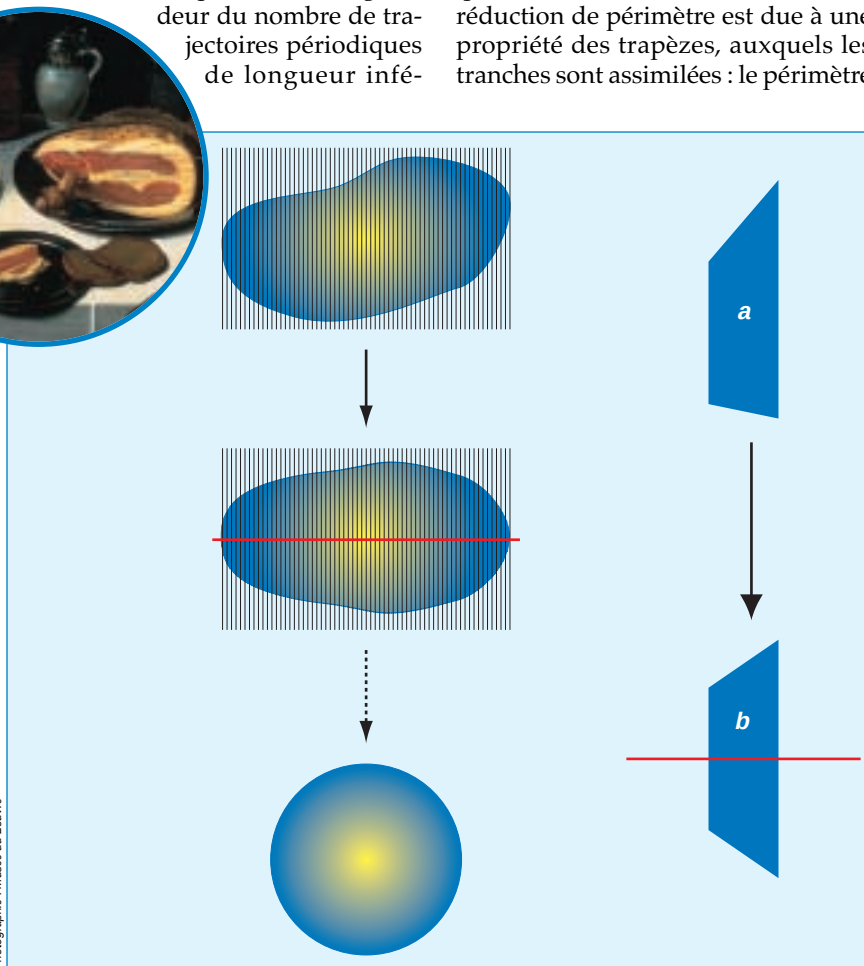
L'analyste et l'algébriste demandent alors : «Existerait-il une méthode plus naturelle pour minimiser le rapport de la longueur de la courbe frontière sur l'aire intérieure d'un domaine D ?»

Le géomètre répond : «Dans la réalité, on étudie plutôt le rapport du carré de la longueur sur l'aire pour manipuler des nombres sans dimensions. Il faut d'abord prouver l'existence d'une limite – une courbe – à ce rapport. Dans le plan, cette existence est démontrée. Toutefois, ce problème d'existence est à considérer ici dans l'espace infini de toutes les courbes : jusque dans les années 1960, dans des espaces de dimensions infinies, aucun théorème d'existence d'objets limites au sein de familles d'objets géométriques, telles les courbes, et de limites de variables elles aussi géométriques, telle l'aire d'un domaine, n'était disponible. Ce n'est qu'à la suite des travaux d'Herbert Federer, alors à l'Université Brown, qui constituent la théorie géométrique de la mesure, que l'existence de telles limites a été prouvée. On conclut alors, et ce en dimension quelconque, que la limite est, en deux dimensions, un disque, et, au-delà, une boule.

Puisque nous évoquons la démonstration de l'inégalité isopérimétrique, nous pouvons aussi penser l'augmentation du rapport du carré de la longueur sur l'aire, non plus par l'opération de symétrisation, mais par une transformation continue, c'est-à-dire la déformation d'une courbe C en une courbe de plus en plus proche d'un cercle. Pour ce faire, on se souvient que les cercles sont des courbes dont la courbure est constante.»

L'algébriste interrompt ici le géomètre : «Tu peux nous rappeler ce qu'un géomètre entend par courbure?»

«Bien sûr ! Pour déterminer la cour-



Photographie : Musée du Louvre

8. LA SYMÉTRISATION d'un domaine réduit son périmètre en maintenant son aire constante. On découpe le domaine initial en tranches infiniment fines (à gauche), puis on rassemble ces tranches symétriquement selon un axe perpendiculaire à celui des tranches. Lorsque cette opération est itérée un nombre infini de fois, le domaine tend vers un cercle qui minimise le périmètre. Celui-ci diminue en vertu d'une propriété des trapèzes de même aire (à droite) : le périmètre du trapèze b , symétrique, est inférieur à celui du trapèze a .

bure, le géomètre cherche le cercle osculateur à la courbe en un point. Pour ce faire, on considère le cercle tangent à la courbe en ce point et passant par un point voisin. Quand ce point voisin se rapproche du point étudié, ce cercle a une limite, c'est le cercle osculateur en ce point et son rayon est le rayon de courbure de la courbe. La courbure, elle, est par définition l'inverse de ce rayon. Ensuite, en chacun de ses points, la courbe se déplace le long de sa normale (la droite perpendiculaire à la tangente en ce point) d'une quantité inversement proportionnelle à la courbure en ce point (voir la figure 9). De manière plus précise, on cherche une famille de courbes $C(t)$, t est un paramètre continu, par exemple le temps, tel que la dérivée le long des normales soit inversement proportionnelle à la courbure. L'équation aux dérivées partielles qui décrit cette famille de courbes admet des solutions pour des temps assez petits. En revanche, l'existence pour un temps infini est une étude difficile.»

L'analyste interrompt de nouveau le géomètre : «Lorsque t tend vers l'infini, les courbes $C(t)$ ne convergent-elles pas vers un point, plutôt que vers un cercle?»

«Oui, cependant, convenablement renormalisées, c'est-à-dire que l'échelle de chaque courbe est modifiée de façon à conserver l'aire du domaine, les courbes $C(t)$ convergent vraiment vers un cercle. Enfin, en 1986, Gage a montré que le rapport isopérimétrique décroît lorsque t augmente. Cette technique d'évolution géométrique peut être utilisée dans des contextes plus généraux, par exemple pour obtenir des géodésiques périodiques sur les surfaces. Sujet que j'aimerais maintenant aborder avec vous, si vous le permettez.»

Les géodésiques du dessert

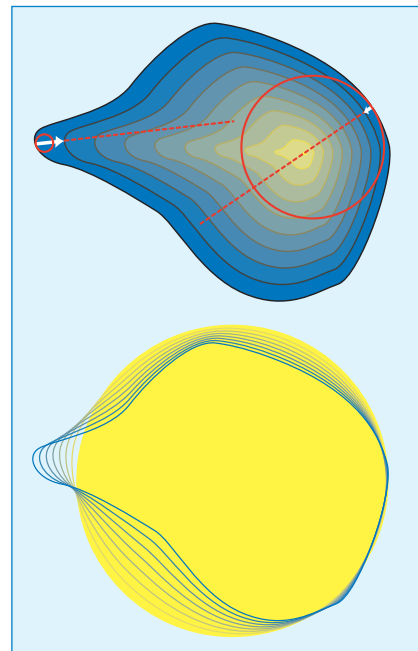
«Nous étudions un système dynamique continu dans lequel on décrit le mouvement d'une particule qui se meut sur une surface S donnée de l'espace, sans gravité. Depuis Johann Bernoulli (1667 - 1748), qui l'a enseigné à son non moins illustre élève Leonhard Euler (1707 - 1783), on sait qu'un tel mouvement suit une géodésique de la surface, c'est-à-dire une courbe dont l'accélération dans l'espace est normale à la surface, ou encore des courbes qui minimisent le chemin parcouru entre deux points voisins. Que devient cette

trajectoire, cette géodésique, lorsqu'on la prolonge indéfiniment? Est-elle périodique? À l'inverse, recouvre-t-elle toute la surface? Plus encore, prend-elle toutes les directions en chaque point? Et s'il existe des trajectoires périodiques, peut-on évaluer leur nombre en fonction de leur longueur? En 1905, Henri Poincaré a été le premier à s'intéresser à ce problème, car il s'agit du modèle mathématique le plus simple se rapprochant de celui qui décrit le Système solaire.

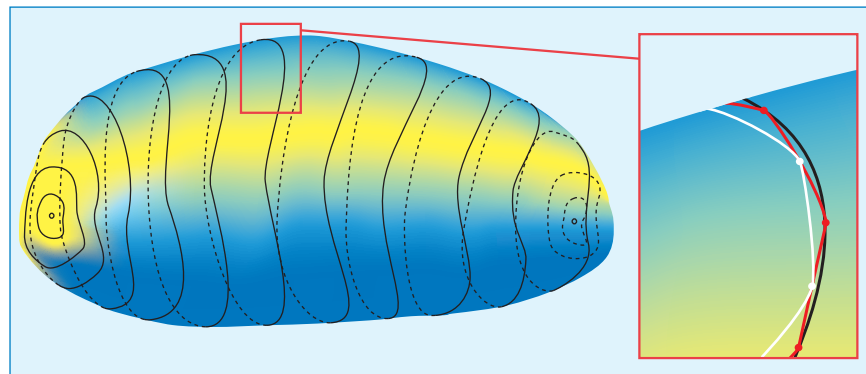
Dans le cas de la sphère, toutes les trajectoires, en nombre infini, sont périodiques et de même période : ce sont les grands cercles (les équateurs) de la sphère. Par ailleurs, d'autres surfaces, telles les surfaces de Zoll, qui ne sont pas des sphères, ont cette propriété (voir la figure 6). Pour toute surface de révolution, il y a une infinité de géodésiques périodiques. Sur une telle surface, la trajectoire d'une particule oscille entre deux parallèles. De par la révolution de la surface, une géodésique qui part d'une parallèle y reviendra après un certain temps, mais en un point qui a tourné d'un angle α par rapport au point initial. Nous sommes alors de nouveau dans le cas du billard que nous avons déjà évoqué : les géodésiques périodiques correspondent aux angles α proportionnels à π ; elles sont en nombre infini.

Pour les surfaces générales, on cherche d'une part à montrer l'existence de géodésiques périodiques, et à les évaluer asymptotiquement ; d'autre part, à déterminer l'ergodicité (en espace ou en phase) des trajectoires non périodiques. Posé simplement, le problème n'en demeure pas moins ardu : Poincaré échoua à prouver l'existence d'une

seule géodésique périodique. La raison essentielle de cette difficulté résultait, comme pour l'inégalité isopérimétrique, de l'absence d'un théorème d'existence de limites dans un espace géométrique de dimension infinie, ici celui des courbes fermées d'une surface. Ce n'est qu'en 1917 que George Birkhoff (1884-1944) a démontré, sans recours à un théorème d'existence d'une forme



9. LE PÉRIMÈTRE LE PLUS COURT pour une surface d'aire donnée (en bleu) est un cercle. L'une des méthodes pour le montrer consiste à déplacer les points du périmètre initial le long de leur normale d'une distance (en blanc) inversement proportionnelle au rayon du cercle osculateur (en rouge). En haut, le domaine tend vers un point, cependant, lorsque les domaines sont renormalisées, c'est-à-dire maintenus à aire constante, le domaine tend vers un cercle (en bas).



10. UNE TAPISSERIE est une famille de courbes qui «recouvrent» entièrement une surface. À partir d'une tapisserie quelconque (à gauche), on identifie une géodésique périodique en découpant les courbes en fragments d'une longueur inférieure à une distance donnée. Puis, entre deux points consécutifs, on prend le chemin le plus court (en rouge, à droite) ; sur une sphère, on prendrait les morceaux des grands cercles entre chaque paire de points. Enfin, des milieux des côtés du polygone géodésique, on trace un autre polygone strictement plus court (en blanc). La plus longue courbe d'une tapisserie économique est une géodésique périodique.