

bure, le géomètre cherche le cercle osculateur à la courbe en un point. Pour ce faire, on considère le cercle tangent à la courbe en ce point et passant par un point voisin. Quand ce point voisin se rapproche du point étudié, ce cercle a une limite, c'est le cercle osculateur en ce point et son rayon est le rayon de courbure de la courbe. La courbure, elle, est par définition l'inverse de ce rayon. Ensuite, en chacun de ses points, la courbe se déplace le long de sa normale (la droite perpendiculaire à la tangente en ce point) d'une quantité inversement proportionnelle à la courbure en ce point (voir la figure 9). De manière plus précise, on cherche une famille de courbes $C(t)$, t est un paramètre continu, par exemple le temps, tel que la dérivée le long des normales soit inversement proportionnelle à la courbure. L'équation aux dérivées partielles qui décrit cette famille de courbes admet des solutions pour des temps assez petits. En revanche, l'existence pour un temps infini est une étude difficile.»

L'analyste interrompt de nouveau le géomètre : «Lorsque t tend vers l'infini, les courbes $C(t)$ ne convergent-elles pas vers un point, plutôt que vers un cercle?»

«Oui, cependant, convenablement renormalisées, c'est-à-dire que l'échelle de chaque courbe est modifiée de façon à conserver l'aire du domaine, les courbes $C(t)$ convergent vraiment vers un cercle. Enfin, en 1986, Gage a montré que le rapport isopérimétrique décroît lorsque t augmente. Cette technique d'évolution géométrique peut être utilisée dans des contextes plus généraux, par exemple pour obtenir des géodésiques périodiques sur les surfaces. Sujet que j'aimerais maintenant aborder avec vous, si vous le permettez.»

Les géodésiques du dessert

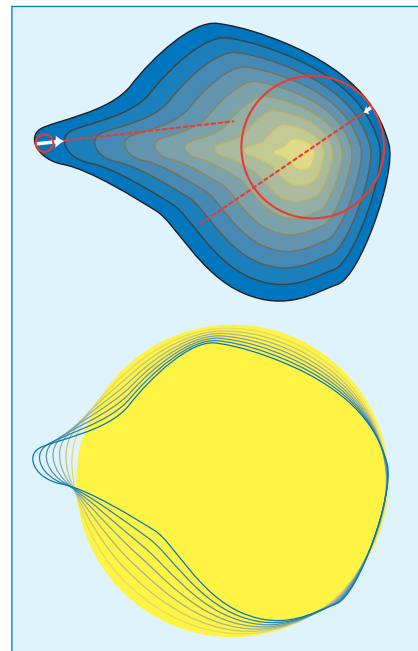
«Nous étudions un système dynamique continu dans lequel on décrit le mouvement d'une particule qui se meut sur une surface S donnée de l'espace, sans gravité. Depuis Johann Bernouilli (1667 - 1748), qui l'a enseigné à son non moins illustre élève Leonhard Euler (1707 - 1783), on sait qu'un tel mouvement suit une géodésique de la surface, c'est-à-dire une courbe dont l'accélération dans l'espace est normale à la surface, ou encore des courbes qui minimisent le chemin parcouru entre deux points voisins. Que devient cette

trajectoire, cette géodésique, lorsqu'on la prolonge indéfiniment? Est-elle périodique? À l'inverse, recouvre-t-elle toute la surface? Plus encore, prend-elle toutes les directions en chaque point? Et s'il existe des trajectoires périodiques, peut-on évaluer leur nombre en fonction de leur longueur? En 1905, Henri Poincaré a été le premier à s'intéresser à ce problème, car il s'agit du modèle mathématique le plus simple se rapprochant de celui qui décrit le Système solaire.

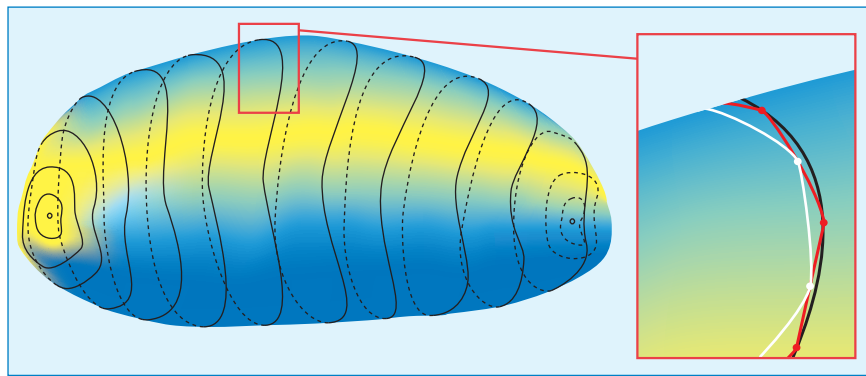
Dans le cas de la sphère, toutes les trajectoires, en nombre infini, sont périodiques et de même période : ce sont les grands cercles (les équateurs) de la sphère. Par ailleurs, d'autres surfaces, telles les surfaces de Zoll, qui ne sont pas des sphères, ont cette propriété (voir la figure 6). Pour toute surface de révolution, il y a une infinité de géodésiques périodiques. Sur une telle surface, la trajectoire d'une particule oscille entre deux parallèles. De par la révolution de la surface, une géodésique qui part d'une parallèle y reviendra après un certain temps, mais en un point qui a tourné d'un angle α par rapport au point initial. Nous sommes alors de nouveau dans le cas du billard que nous avons déjà évoqué : les géodésiques périodiques correspondent aux angles α proportionnels à π ; elles sont en nombre infini.

Pour les surfaces générales, on cherche d'une part à montrer l'existence de géodésiques périodiques, et à les évaluer asymptotiquement ; d'autre part, à déterminer l'ergodicité (en espace ou en phase) des trajectoires non périodiques. Posé simplement, le problème n'en demeure pas moins ardu : Poincaré échoua à prouver l'existence d'une

seule géodésique périodique. La raison essentielle de cette difficulté résultait, comme pour l'inégalité isopérimétrique, de l'absence d'un théorème d'existence de limites dans un espace géométrique de dimension infinie, ici celui des courbes fermées d'une surface. Ce n'est qu'en 1917 que George Birkhoff (1884-1944) a démontré, sans recours à un théorème d'existence d'une forme



9. LE PÉRIMÈTRE LE PLUS COURT pour une surface d'aire donnée (en bleu) est un cercle. L'une des méthodes pour le montrer consiste à déplacer les points du périmètre initial le long de leur normale d'une distance (en blanc) inversement proportionnelle au rayon du cercle osculateur (en rouge). En haut, le domaine tend vers un point, cependant, lorsque les domaines sont renormalisées, c'est-à-dire maintenus à aire constante, le domaine tend vers un cercle (en bas).



10. UNE TAPISSERIE est une famille de courbes qui «recouvrent» entièrement une surface. À partir d'une tapisserie quelconque (à gauche), on identifie une géodésique périodique en découpant les courbes en fragments d'une longueur inférieure à une distance donnée. Puis, entre deux points consécutifs, on prend le chemin le plus court (en rouge, à droite) ; sur une sphère, on prendrait les morceaux des grands cercles entre chaque paire de points. Enfin, des milieux des côtés du polygone géodésique, on trace un autre polygone strictement plus court (en blanc). La plus longue courbe d'une tapisserie économique est une géodésique périodique.

limite, l'existence d'une géodésique périodique pour une surface quelconque. Tout d'abord, il considère toutes les tapisseries de la surface, c'est-à-dire les familles de courbes allant d'une courbe réduite à un point m à une autre courbe réduite à un point m' : cette

famille de courbes recouvre entièrement la surface étudiée (voir la figure 10). Dans chacune des tapisseries, il y a une courbe de plus grande longueur, et l'on recherche une tapisserie pour laquelle la courbe de plus grande longueur est la plus petite possible.»

L'algébriste se permet une remarque : «En quelque sorte, il s'agit de rechercher une tapisserie économique.»

«À quelques subtilités près, c'est exact ! La plus grande courbe de cette tapisserie optimale est une géodésique périodique. Cela, à cause de la propriété de minimalité des géodésiques.»

L'analyste ponctue : «Reste à prouver l'existence d'une tapisserie économique.»

«C'est là qu'intervient la deuxième idée de Birkhoff : passer d'un espace de dimension infinie à un espace de dimension finie. Il a cherché à fabriquer, à partir d'une tapisserie quelconque, une deuxième tapisserie dont toutes les courbes sont strictement plus petites, à l'exception des géodésiques périodiques. Une tapisserie minimale contient toujours une géodésique périodique ; sinon, la transformation de nouveau appliquée fournirait une tapisserie dont toutes les courbes seraient plus courtes, et la tapisserie précédente ne serait donc pas minimale. Le procédé de Birkhoff

consiste à découper les courbes des tapisseries de la surface en N morceaux de longueurs inférieures à une distance donnée. Puis on remplace chaque morceau par le chemin le plus court, toujours sur la surface, joignant les deux extrémités du morceau. La deuxième opération consiste à prendre ensuite les milieux des côtés des polygones géodésiques obtenus et de les joindre en un nouveau polygone strictement plus petit, car, sur n'importe quelle surface, la longueur d'un côté d'un triangle est toujours inférieure à la somme des deux autres. Le nouveau polygone aura une longueur strictement inférieure à celle de la courbe initiale, à moins que tous les angles aux sommets soient égaux à π ; or cela arrive exactement pour une géodésique périodique. Ainsi, le raccourcissement simultané de toutes les courbes de la tapisserie entraîne la convergence de ces courbes en un point, sauf pour l'une d'entre elles : une géodésique périodique. Voilà comment le passage d'une dimension infinie à une dimension finie résout le problème.

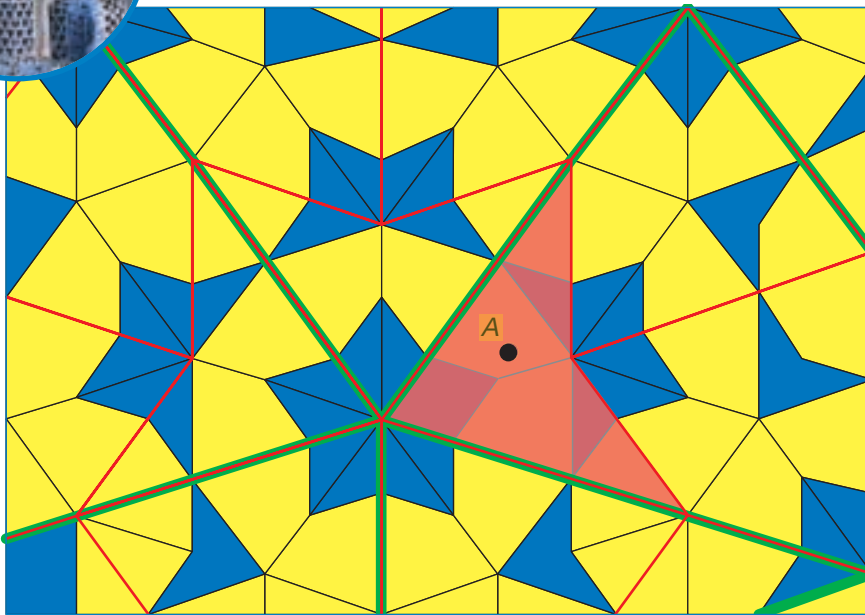
Ce procédé ne fournit qu'une seule géodésique périodique, et ce n'est qu'en 1992 que J. Franks, de l'Université de Fribourg, en Allemagne, et Victor Bangert ont montré qu'il en existe une infinité.»

L'analyste ne put qu'approuver : «Admirable !»

L'algébriste, après avoir fini son dessert, reprend la parole : «Face à un espace géométrique de dimension infinie, Birkhoff se tire d'affaire, certes de façon élégante, en approximant cet espace – l'espace de toutes les courbes planes d'une surface – avec un espace de dimension finie. Mais je subodore que ce n'est pas toujours possible.»

«Vrai, examinons par exemple celui des pavages de Penrose, c'est-à-dire ceux qui, construits à partir de deux types de pavés, recouvrent le plan à l'infini, mais de façon nécessairement non périodique, grâce aux règles de construction (voir la figure 12). En 1975, Robinson a montré que l'on peut complètement les classer. Il a remarqué qu'à partir d'un pavage donné P , on peut grouper les pavés afin qu'ils forment des pavés plus grands de deux types seulement. Le nouveau pavage obtenu P^1 est également non périodique. De P^1 , par le même procédé, on obtient P^2 , puis P^3 , jusqu'à P^n , n tendant vers l'infini. Il s'agit ensuite de prendre un point quelconque à l'intérieur du pavage initial et de regarder dans quel

11. QUATRE POINTS jetés dans un plan forment soit un quadrilatère, soit un triangle contenant le quatrième point. La probabilité d'obtenir le premier dépend de la géométrie du domaine : elle est maximale dans un domaine en ellipse, et minimale dans un domaine en triangle. La premier exemple de probabilités géométrique est le fameux problème de Buffon qui étudiait la probabilité d'une aiguille lâchée d'être à cheval sur deux lattes d'un plancher (en haut, à droite).



12. UN PAVAGE DE PENROSE est un pavage du plan non périodique avec deux types de pavés (en bleu et jaune). Groupés, les pavés forment un second pavage non périodique constitué de deux types de pavés plus grands (en rouge). À partir de ce pavage, on en construit un nouveau d'ordre supérieur (en vert). Dans chaque pavage, on associe à chaque type de pavés un chiffre (par exemple, 1 pour les pavés convexes et 0 pour les pavés concaves). On montre que l'espace des pavages de Penrose est similaire à celui des suites de 0 ou 1 qui coïncident à partir d'un certain rang et dans lesquelles un 1 est toujours suivi d'un 0. Ces suites sont construites en identifiant pour chaque ordre de pavage, le type de pavés dans lequel un point initial quelconque se trouve. Par exemple, le point A donne la suite 101...