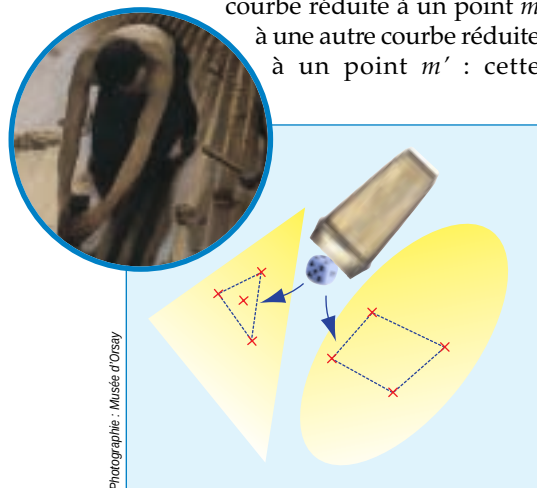
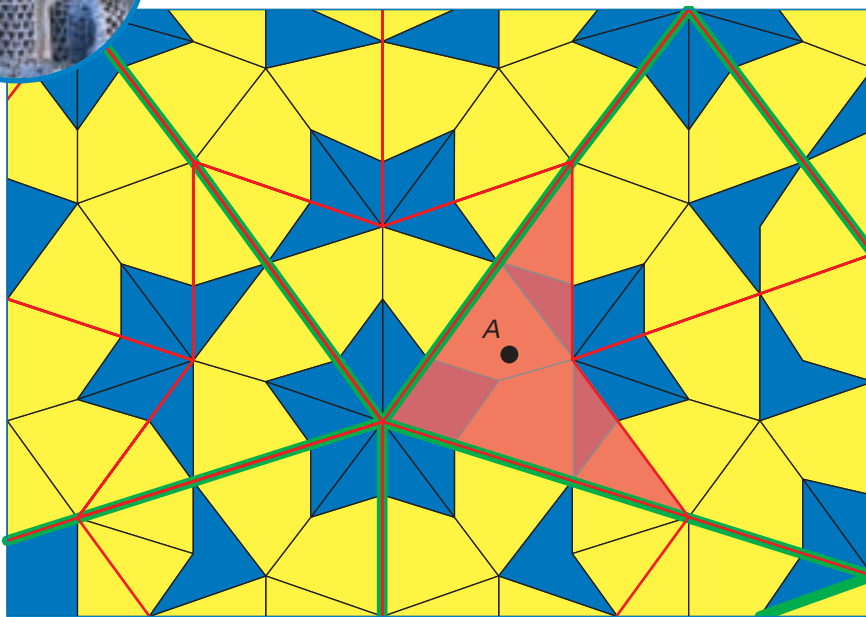


limite, l'existence d'une géodésique périodique pour une surface quelconque. Tout d'abord, il considère toutes les tapisseries de la surface, c'est-à-dire les familles de courbes allant d'une courbe réduite à un point m à une autre courbe réduite à un point m' : cette



Photographie : Musée d'Orsay

11. QUATRE POINTS jetés dans un plan forment soit un quadrilatère, soit un triangle contenant le quatrième point. La probabilité d'obtenir le premier dépend de la géométrie du domaine : elle est maximale dans un domaine en ellipse, et minimale dans un domaine en triangle. La premier exemple de probabilités géométrique est le fameux problème de Buffon qui étudiait la probabilité d'une aiguille lâchée d'être à cheval sur deux lattes d'un plancher (en haut, à droite).



12. UN PAVAGE DE PENROSE est un pavage du plan non périodique avec deux types de pavés (en bleu et jaune). Groupés, les pavés forment un second pavage non périodique constitué de deux types de pavés plus grands (en rouge). À partir de ce pavage, on en construit un nouveau d'ordre supérieur (en vert). Dans chaque pavage, on associe à chaque type de pavés un chiffre (par exemple, 1 pour les pavés convexes et 0 pour les pavés concaves). On montre que l'espace des pavages de Penrose est similaire à celui des suites de 0 ou 1 qui coïncident à partir d'un certain rang et dans lesquelles un 1 est toujours suivi d'un 0. Ces suites sont construites en identifiant pour chaque ordre de pavage, le type de pavés dans lequel un point initial quelconque se trouve. Par exemple, le point A donne la suite 101...

famille de courbes recouvre entièrement la surface étudiée (voir la figure 10). Dans chacune des tapisseries, il y a une courbe de plus grande longueur, et l'on recherche une tapisserie pour laquelle la courbe de plus grande longueur est la plus petite possible.»

L'algébriste se permet une remarque : «En quelque sorte, il s'agit de rechercher une tapisserie économique.»

«À quelques subtilités près, c'est exact ! La plus grande courbe de cette tapisserie optimale est une géodésique périodique. Cela, à cause de la propriété de minimalité des géodésiques.»

L'analyste ponctue : «Reste à prouver l'existence d'une tapisserie économique.»

«C'est là qu'intervient la deuxième idée de Birkhoff : passer d'un espace de dimension infinie à un espace de dimension finie. Il a cherché à fabriquer, à partir d'une tapisserie quelconque, une deuxième tapisserie dont toutes les courbes sont strictement plus petites, à l'exception des géodésiques périodiques. Une tapisserie minimale contient toujours une géodésique périodique ; sinon, la transformation de nouveau appliquée fournirait une tapisserie dont toutes les courbes seraient plus courtes, et la tapisserie précédente ne serait donc pas minimale. Le procédé de Birkhoff

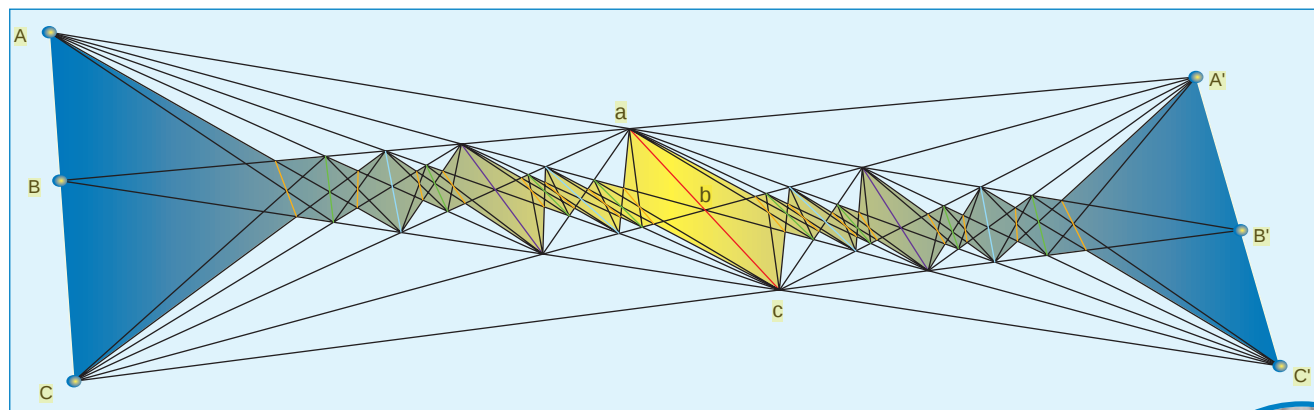
consiste à découper les courbes des tapisseries de la surface en N morceaux de longueurs inférieures à une distance donnée. Puis on remplace chaque morceau par le chemin le plus court, toujours sur la surface, joignant les deux extrémités du morceau. La deuxième opération consiste à prendre ensuite les milieux des côtés des polygones géodésiques obtenus et de les joindre en un nouveau polygone strictement plus petit, car, sur n'importe quelle surface, la longueur d'un côté d'un triangle est toujours inférieure à la somme des deux autres. Le nouveau polygone aura une longueur strictement inférieure à celle de la courbe initiale, à moins que tous les angles aux sommets soient égaux à π ; or cela arrive exactement pour une géodésique périodique. Ainsi, le raccourcissement simultané de toutes les courbes de la tapisserie entraîne la convergence de ces courbes en un point, sauf pour l'une d'entre elles : une géodésique périodique. Voilà comment le passage d'une dimension infinie à une dimension finie résout le problème.

Ce procédé ne fournit qu'une seule géodésique périodique, et ce n'est qu'en 1992 que J. Franks, de l'Université de Fribourg, en Allemagne, et Victor Bangert ont montré qu'il en existe une infinité.»

L'analyste ne put qu'approuver : «Admirable!»

L'algébriste, après avoir fini son dessert, reprend la parole : «Face à un espace géométrique de dimension infinie, Birkhoff se tire d'affaire, certes de façon élégante, en approximant cet espace – l'espace de toutes les courbes planes d'une surface – avec un espace de dimension finie. Mais je subodore que ce n'est pas toujours possible.»

«Vrai, examinons par exemple celui des pavages de Penrose, c'est-à-dire ceux qui, construits à partir de deux types de pavés, recouvrent le plan à l'infini, mais de façon nécessairement non périodique, grâce aux règles de construction (voir la figure 12). En 1975, Robinson a montré que l'on peut complètement les classer. Il a remarqué qu'à partir d'un pavage donné P , on peut grouper les pavés afin qu'ils forment des pavés plus grands de deux types seulement. Le nouveau pavage obtenu P^1 est également non périodique. De P^1 , par le même procédé, on obtient P^2 , puis P^3 , jusqu'à P^n , n tendant vers l'infini. Il s'agit ensuite de prendre un point quelconque à l'intérieur du pavage initial et de regarder dans quel



Photographie : Musée Fernand Léger

13. LE THÉORÈME DE PAPPUS associe à deux triplets de point alignés (A, B, C) et (A', B', C') un troisième (a, b, c) : à partir des deux paires de triplets ainsi formées, le même procédé crée deux autres triplets. L'ensemble obtenu après l'itération à l'infini (seules cinq

sont représentées ici : dans l'ordre, rouge, violet, bleu, vert et orange) de cette opération, est fractal et a la structure de groupe modulaire que l'on retrouve dans de nombreux domaines des mathématiques.

type de pavé il est dans P^1 , dans P^2 , jusqu'à P^n : quand, à chaque type de pavé, à un niveau d'itération donné, correspond un chiffre 0 ou 1, on obtient une série de 0 et de 1. Ainsi, les pavages de Penrose forment un espace infini qui est similaire – en mathématiques, on dit isomorphe – à celui de l'ensemble de toutes les suites infinies de 0 ou de 1 dans lesquelles tout 1 est nécessairement suivi d'un 0. Des pavages sont identiques quand leurs suites coïncident à partir d'un certain rang, et ce jusqu'à l'infini : cette caractéristique signifie que, dans un même pavage, deux points initiaux différents sont, à partir d'un certain ordre, dans des pavés de même type.»

Le dîner touchait à sa fin. Au moment du café, l'algébriste et l'analyste sont presque convaincus. Dans leur élan, un cure-dents négligé pendant l'apéritif, roule et tombe sur plancher... à cheval sur deux lattes.

Des probabilités géométriques

Le géomètre reprend derechef : «Vous connaissez sans doute le problème des aiguilles de Buffon ? Il s'agit de calculer la probabilité qu'une aiguille a de tomber à cheval sur deux lattes d'un plancher. Ce problème est le premier exemple connu de probabilités géométriques. Nous ne sommes pas éloignés des itérations, puisqu'une probabilité dans la pratique signifie répéter une opération un nombre infini de fois. Je vous soumets un autre exemple. Il est intéressant, car enfantin d'énoncé, et cependant en partie incompris aujourd'hui.

Lorsqu'on jette quatre points au hasard dans un domaine du plan, deux

cas sont possibles : ou les quatre points forment un vrai quadrilatère, ou bien l'un est à l'intérieur du triangle formé par les trois autres (voir la figure 12). Quelle est la probabilité d'avoir un vrai quadrilatère?»

L'algébriste et l'analyste réfléchissent un instant, puis le premier répond : «De nouveau intuitivement, je pense que la réponse dépend de la forme du domaine ; si c'est un triangle, il sera plus difficile d'avoir un quadrilatère près des sommets que dans une autre région. À l'inverse, un quadrilatère est plus probable près du bord d'un domaine dont la frontière est une courbe lisse.»

Le géomètre poursuit : «Exact, en 1930, Blaschke a montré que la probabilité cherchée est maximale quand le domaine est une ellipse, et minimale pour un triangle. En revanche, dès que l'on s'intéresse à des dimensions plus grandes, par exemple au jet de cinq points dans l'espace tridimensionnel, et plus généralement de $n+2$ points dans un espace à n dimensions, les géomètres sont perdus. Pour la dimension trois, on montre, avec difficulté, que les ellipsoïdes sont les domaines les plus favorables à la formation d'un pentaèdre. En revanche, pour la plus mauvaise probabilité, on ne sait pas si c'est celle d'un tétraèdre. Plus grave encore : on ne connaît pas la valeur exacte de la probabilité pour le tétraèdre, c'est-à-dire que l'on ne sait pas calculer le volume moyen de l'infinité de tétraèdres contenu dans un tétraèdre donné. Les géomètres ont encore du pain sur la planche.»

Les mathématiciens s'apprentent à partir, quand dehors, un accordéoniste passe avec son instrument.

De nouveau Pappus

«Messieurs, avant de nous quitter, et puisqu'il a beaucoup été question de cercles dans mon exposé, je terminerais par où j'ai commencé, à savoir avec le théorème de Pappus. En 1993, R. Schwarz a remarqué que Pappus associe, à toute paire de triplets de points alignés sur une droite, un troisième triplet du même type. Il est donc naturel d'itérer l'opération et, à partir de chacune des deux paires créées, de construire de nouveaux triplets (voir la figure 13). Que se passe-t-il quand cette opération est répétée à l'infini ? L'ensemble des droites obtenues forme une fractale qui, de plus, a une structure de groupe modulaire. Cette structure que l'on retrouve dans tant de branches des mathématiques : la théorie des nombres, la théorie des groupes, la géométrie des surfaces, la théorie des nombres complexes, etc.

Vous voyez, messieurs, conclut le géomètre alors que trois taxis se garent devant l'hôtel des Trois Faisans, à l'inverse de ce que vous pouviez penser, l'infini est omniprésent en géométrie, et il permet même de relier nos trois disciplines.»

Et les trois de se quitter... maintenant tous convaincus que les mathématiques, toutes les mathématiques, sont la science de l'infini.

Marcel BERGER est l'ancien directeur de l'Institut des hautes études scientifiques.

Marcel BERGER, *Géométrie vivante ou l'échelle de Jacob de la géométrie*, Cassini, à paraître.