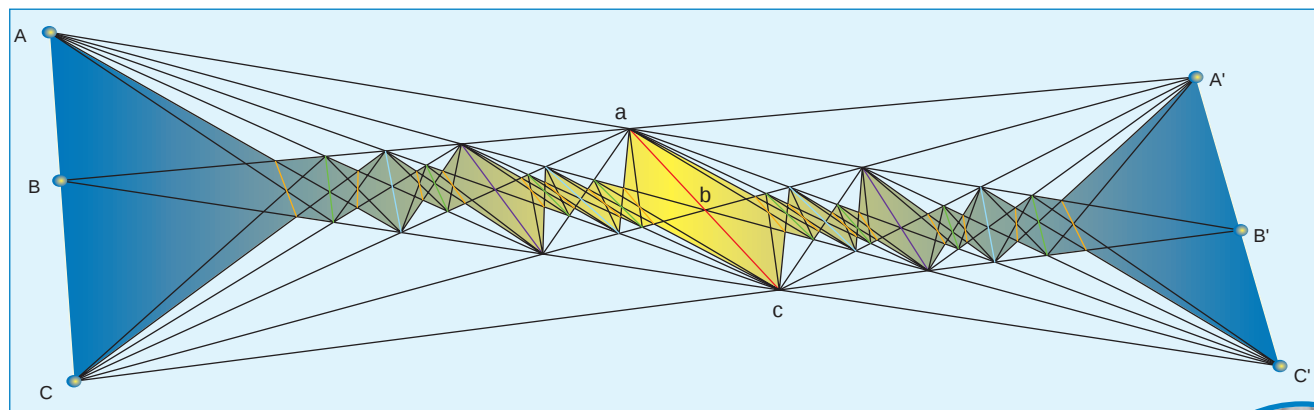
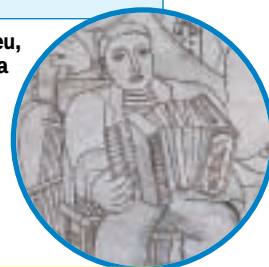




Photographie : Musée Fernand Léger

13. LE THÉORÈME DE PAPPUS associe à deux triplets de points alignés (A, B, C) et (A', B', C') un troisième (a, b, c) : à partir des deux paires de triplets ainsi formées, le même procédé crée deux autres triplets. L'ensemble obtenu après l'itération à l'infini (seules cinq

sont représentées ici : dans l'ordre, rouge, violet, bleu, vert et orange) de cette opération, est fractal et a la structure de groupe modulaire que l'on retrouve dans de nombreux domaines des mathématiques.



type de pavé il est dans P^1 , dans P^2 , jusqu'à P^n : quand, à chaque type de pavé, à un niveau d'itération donné, correspond un chiffre 0 ou 1, on obtient une série de 0 et de 1. Ainsi, les pavages de Penrose forment un espace infini qui est similaire – en mathématiques, on dit isomorphe – à celui de l'ensemble de toutes les suites infinies de 0 ou de 1 dans lesquelles tout 1 est nécessairement suivi d'un 0. Des pavages sont identiques quand leurs suites coïncident à partir d'un certain rang, et ce jusqu'à l'infini : cette caractéristique signifie que, dans un même pavage, deux points initiaux différents sont, à partir d'un certain ordre, dans des pavés de même type.»

Le dîner touchait à sa fin. Au moment du café, l'algébriste et l'analyste sont presque convaincus. Dans leur élan, un cure-dents négligé pendant l'apéritif, roule et tombe sur plancher... à cheval sur deux lattes.

Des probabilités géométriques

Le géomètre reprend derechef : «Vous connaissez sans doute le problème des aiguilles de Buffon ? Il s'agit de calculer la probabilité qu'une aiguille a de tomber à cheval sur deux lattes d'un plancher. Ce problème est le premier exemple connu de probabilités géométriques. Nous ne sommes pas éloignés des itérations, puisqu'une probabilité dans la pratique signifie répéter une opération un nombre infini de fois. Je vous soumetts un autre exemple. Il est intéressant, car enfantin d'énoncé, et cependant en partie incompris aujourd'hui.

Lorsqu'on jette quatre points au hasard dans un domaine du plan, deux

cas sont possibles : ou les quatre points forment un vrai quadrilatère, ou bien l'un est à l'intérieur du triangle formé par les trois autres (voir la figure 12). Quelle est la probabilité d'avoir un vrai quadrilatère ?»

L'algébriste et l'analyste réfléchissent un instant, puis le premier répond : «De nouveau intuitivement, je pense que la réponse dépend de la forme du domaine ; si c'est un triangle, il sera plus difficile d'avoir un quadrilatère près des sommets que dans une autre région. À l'inverse, un quadrilatère est plus probable près du bord d'un domaine dont la frontière est une courbe lisse.»

Le géomètre poursuit : «Exact, en 1930, Blaschke a montré que la probabilité cherchée est maximale quand le domaine est une ellipse, et minimale pour un triangle. En revanche, dès que l'on s'intéresse à des dimensions plus grandes, par exemple au jet de cinq points dans l'espace tridimensionnel, et plus généralement de $n+2$ points dans un espace à n dimensions, les géomètres sont perdus. Pour la dimension trois, on montre, avec difficulté, que les ellipsoïdes sont les domaines les plus favorables à la formation d'un pentaèdre. En revanche, pour la plus mauvaise probabilité, on ne sait pas si c'est celle d'un tétraèdre. Plus grave encore : on ne connaît pas la valeur exacte de la probabilité pour le tétraèdre, c'est-à-dire que l'on ne sait pas calculer le volume moyen de l'infinité de tétraèdres contenu dans un tétraèdre donné. Les géomètres ont encore du pain sur la planche.»

Les mathématiciens s'apprentent à partir, quand dehors, un accordéoniste passe avec son instrument.

De nouveau Pappus

«Messieurs, avant de nous quitter, et puisqu'il a beaucoup été question de cercles dans mon exposé, je terminerais par où j'ai commencé, à savoir avec le théorème de Pappus. En 1993, R. Schwarz a remarqué que Pappus associe, à toute paire de triplets de points alignés sur une droite, un troisième triplet du même type. Il est donc naturel d'itérer l'opération et, à partir de chacune des deux paires créées, de construire de nouveaux triplets (voir la figure 13). Que se passe-t-il quand cette opération est répétée à l'infini ? L'ensemble des droites obtenues forme une fractale qui, de plus, a une structure de groupe modulaire. Cette structure que l'on retrouve dans tant de branches des mathématiques : la théorie des nombres, la théorie des groupes, la géométrie des surfaces, la théorie des nombres complexes, etc.

Vous voyez, messieurs, conclut le géomètre alors que trois taxis se garent devant l'hôtel des Trois Faisans, à l'inverse de ce que vous pouviez penser, l'infini est omniprésent en géométrie, et il permet même de relier nos trois disciplines.»

Et les trois de se quitter... maintenant tous convaincus que les mathématiques, toutes les mathématiques, sont la science de l'infini.

Marcel BERGER est l'ancien directeur de l'Institut des hautes études scientifiques.

Marcel BERGER, *Géométrie vivante ou l'échelle de Jacob de la géométrie*, Cassini, à paraître.