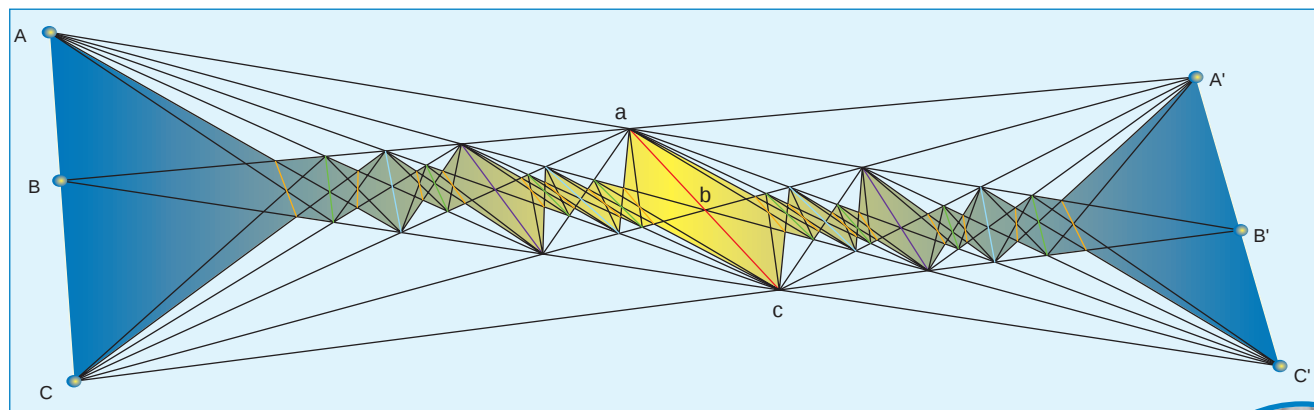
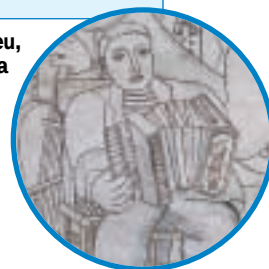




Photographie : Musée Fernand Léger

13. LE THÉORÈME DE PAPPUS associe à deux triplets de point alignés (A, B, C) et (A', B', C') un troisième (a, b, c) : à partir des deux paires de triplets ainsi formées, le même procédé crée deux autres triplets. L'ensemble obtenu après l'itération à l'infini (seules cinq

sont représentées ici : dans l'ordre, rouge, violet, bleu, vert et orange) de cette opération, est fractal et a la structure de groupe modulaire que l'on retrouve dans de nombreux domaines des mathématiques.



type de pavé il est dans P^1 , dans P^2 , jusqu'à P^n : quand, à chaque type de pavé, à un niveau d'itération donné, correspond un chiffre 0 ou 1, on obtient une série de 0 et de 1. Ainsi, les pavages de Penrose forment un espace infini qui est similaire – en mathématiques, on dit isomorphe – à celui de l'ensemble de toutes les suites infinies de 0 ou de 1 dans lesquelles tout 1 est nécessairement suivi d'un 0. Des pavages sont identiques quand leurs suites coïncident à partir d'un certain rang, et ce jusqu'à l'infini : cette caractéristique signifie que, dans un même pavage, deux points initiaux différents sont, à partir d'un certain ordre, dans des pavés de même type.»

Le dîner touchait à sa fin. Au moment du café, l'algébriste et l'analyste sont presque convaincus. Dans leur élan, un cure-dents négligé pendant l'apéritif, roule et tombe sur plancher... à cheval sur deux lattes.

Des probabilités géométriques

Le géomètre reprend derechef : «Vous connaissez sans doute le problème des aiguilles de Buffon ? Il s'agit de calculer la probabilité qu'une aiguille a de tomber à cheval sur deux lattes d'un plancher. Ce problème est le premier exemple connu de probabilités géométriques. Nous ne sommes pas éloignés des itérations, puisqu'une probabilité dans la pratique signifie répéter une opération un nombre infini de fois. Je vous soumetts un autre exemple. Il est intéressant, car enfantin d'énoncé, et cependant en partie incompris aujourd'hui.

Lorsqu'on jette quatre points au hasard dans un domaine du plan, deux

cas sont possibles : ou les quatre points forment un vrai quadrilatère, ou bien l'un est à l'intérieur du triangle formé par les trois autres (voir la figure 12). Quelle est la probabilité d'avoir un vrai quadrilatère?»

L'algébriste et l'analyste réfléchissent un instant, puis le premier répond : «De nouveau intuitivement, je pense que la réponse dépend de la forme du domaine ; si c'est un triangle, il sera plus difficile d'avoir un quadrilatère près des sommets que dans une autre région. À l'inverse, un quadrilatère est plus probable près du bord d'un domaine dont la frontière est une courbe lisse.»

Le géomètre poursuit : «Exact, en 1930, Blaschke a montré que la probabilité cherchée est maximale quand le domaine est une ellipse, et minimale pour un triangle. En revanche, dès que l'on s'intéresse à des dimensions plus grandes, par exemple au jet de cinq points dans l'espace tridimensionnel, et plus généralement de $n+2$ points dans un espace à n dimensions, les géomètres sont perdus. Pour la dimension trois, on montre, avec difficulté, que les ellipsoïdes sont les domaines les plus favorables à la formation d'un pentaèdre. En revanche, pour la plus mauvaise probabilité, on ne sait pas si c'est celle d'un tétraèdre. Plus grave encore : on ne connaît pas la valeur exacte de la probabilité pour le tétraèdre, c'est-à-dire que l'on ne sait pas calculer le volume moyen de l'infinité de tétraèdres contenu dans un tétraèdre donné. Les géomètres ont encore du pain sur la planche.»

Les mathématiciens s'apprentent à partir, quand dehors, un accordéoniste passe avec son instrument.

De nouveau Pappus

«Messieurs, avant de nous quitter, et puisqu'il a beaucoup été question de cercles dans mon exposé, je terminerai par où j'ai commencé, à savoir avec le théorème de Pappus. En 1993, R. Schwarz a remarqué que Pappus associe, à toute paire de triplets de points alignés sur une droite, un troisième triplet du même type. Il est donc naturel d'itérer l'opération et, à partir de chacune des deux paires créées, de construire de nouveaux triplets (voir la figure 13). Que se passe-t-il quand cette opération est répétée à l'infini ? L'ensemble des droites obtenues forme une fractale qui, de plus, a une structure de groupe modulaire. Cette structure que l'on retrouve dans tant de branches des mathématiques : la théorie des nombres, la théorie des groupes, la géométrie des surfaces, la théorie des nombres complexes, etc.

Vous voyez, messieurs, conclut le géomètre alors que trois taxis se garent devant l'hôtel des Trois Faisans, à l'inverse de ce que vous pouviez penser, l'infini est omniprésent en géométrie, et il permet même de relier nos trois disciplines.»

Et les trois de se quitter... maintenant tous convaincus que les mathématiques, toutes les mathématiques, sont la science de l'infini.

Marcel BERGER est l'ancien directeur de l'Institut des hautes études scientifiques.

Marcel BERGER, *Géométrie vivante ou l'échelle de Jacob de la géométrie*, Cassini, à paraître.

L'analyse non standard

JEAN-MICHEL SALANSKIS



En introduisant la notion d'objet insaisissable, l'analyse non standard a conféré aux infiniment petits un statut honorable et justifié des opérations qui, bien que pratiquement satisfaisantes, posaient des problèmes de principe.

Qui ne s'est amusé à calculer sur sa calculatrice e^{-x} pour une valeur de x positive et assez grande ? Le résultat affiché est alors zéro. De même, lorsque nous appliquons la fonction racine carrée à un nombre positif très grand, nous constatons qu'après un certain nombre d'applications successives, nous obtenons 1. En gros, la calculatrice a calculé $e^{-\infty} = 0$ et, en fin de compte, $\sqrt{1+\epsilon} = 1$. Étranges égalités qui nous paraissent être fausses ou exprimer de manière inadéquate une propriété de limite. Comme la calculatrice calcule, néanmoins, et comme nous avons spontanément traduit son calcul par des écritures reflétant ce qu'elle fait, il semble bien qu'elle traite certains nombres comme infiniment grands ou infiniment petits, et en tire des conséquences pour le calcul.

Ces conséquences évoquent une algèbre des calculs sur les limites. Par exemple, nous avons appris que l'inverse d'une fonction tendant vers l'infini tend vers zéro. Bien sûr, nous l'avons appris de façon correcte et nous avons été mis en garde contre l'équation illicite : $1/\infty = 0$. Toutefois, en pratique, quand nous résolvons des exercices,

nous passons parfois mentalement par l'une de ces équations illicites.

L'analyse non standard est une méthode mathématique rigoureuse qui justifie les équations illicites : elle autorise le discours mathématique à faire usage des nombres infiniment petits ou grands, réputés inexistants. Georg Cantor nous a appris à poser, comme des objets respectables de la théorie des ensembles, des cardinaux infinis associés à des ensembles infinis ; de même, l'analyse non standard a défini des nombres réels infiniment grands ou infiniment petits.

En examinant l'histoire de l'infini et de l'infiniment petit ou grand, nous ferons ressortir cinq étapes : le calcul infinitésimal des pionniers où l'on néglige les grandeurs «très petites» ; la conception de l'infini issue de la théorie des ensembles ; l'analyse non standard du mathématicien américain Abraham Robinson, où l'infiniment grand et l'infiniment petit apparaissent par l'intermédiaire de «l'axiome du choix» ; la théorie des ensembles internes, une extension de la théorie des ensembles qui permet d'apercevoir des infiniment petits ou grands au

1. LES MESUREURS, tableau du XVII^e siècle attribué à Hendrick Van Balen (ci-dessus), illustre l'aphorisme du poète romain Horace : «Il y a une mesure pour toute chose.» Quelle que soit la précision des mesures, les quantités infinitésimales définies par l'analyse non standard resteront à jamais hors de portée.

milieu des nombres usuels ; enfin, l'analyse non standard d'inspiration «constructiviste» suggérée par le mathématicien strasbourgeois récemment disparu, Georges Reeb, qui conduit à envisager des entiers infiniment grands, au-delà des entiers saisissables.

La contradiction infinitésimale

Revenons à l'origine du calcul infinitésimal. Étant donné la relation entre variables $y = x^2$, nous voulons calculer l'accroissement dy de la variable y lorsque x est modifié de la quantité infiniment petite dx . Nous calculons alors $y + dy = (x+dx)^2$ soit, $dy = 2x dx + dx^2$; de là, nous passons à $dy = 2x dx$, en négligeant dx^2 comme carré d'un infiniment petit. Ainsi, dans le calcul infinitésimal, nous considérons comme licite d'affirmer que la différentielle de x^2 est $2x dx$.

Cela paraît une erreur, une «équation imparfaite», mais au fond, le concept de quantité infiniment petite n'étant pas clairement défini, nous ne savons pas très bien jusqu'à quel point il y a erreur. «Infiniment petit», pour les mathématiciens qui élaborent ce calcul, cela signifie «plus petit que toute quantité finie donnée». Chacun s'accorde, au fond, à considérer que la notion même de quantité réelle inclut la propriété que l'on dénomme «archimédianité» : tant qu'une quantité positive n'est pas nulle, on peut toujours trouver une autre quantité, du type $1/n$ (où n est un entier naturel non nul), plus petite qu'elle. Une quantité ne peut alors pas être «plus petite que toute quantité finie donnée», les nombres du type $1/n$ étant de (petites) quantités données. Autrement dit, un réel strictement positif ne peut être infiniment petit au sens strict : on en produit facilement un plus petit.

Pourtant, les pionniers ont développé un calcul où l'on utilise de telles quantités et où l'on en néglige certaines. Toutefois, en dépit de problème de principe, ce calcul s'applique à la fois au sein des mathématiques, puisqu'il permet de caractériser localement les courbes, notamment la pente de la tangente en un point, de calculer les longueurs, des aires, etc. – et hors des mathématiques – puisqu'il autorise la modélisation des phénomènes, par intégration des «équations différentielles» établies sur des données élémentaires de la situation. Il doit donc y avoir une rationalité derrière l'usage des infiniment petits et des «équations imparfaites» et la «pensée infinitésimale» des pionniers était une démarche mal fondée, mais qui allait dans la bonne voie.

La reformulation ensembliste

La pensée ensembliste contemporaine, c'est-à-dire la conception de l'infini issue de la théorie des ensembles, supprime les contradictions en traduisant le discours des pionniers dans son nouveau langage. Ainsi, l'équation précédemment citée, $dy = 2x dx + dx^2$, devient $f(x+dx) - f(x) = 2x dx + dx^2$, « f » étant le nom de la fonction qui à x associe son carré x^2 . On la considère comme une équation exacte où dx est une quantité ordinaire, finie. On divise alors les deux membres par dx et l'on aboutit à : $dy/dx = (f(x+dx) - f(x))/dx = 2x + dx$. On constate maintenant que, «lorsque

dx tend vers 0, le taux d'accroissement $(f(x+dx) - f(x))/dx$ tend vers $2x$ ». Ce n'est pas $2x dx$ qui est assimilable à dy , c'est dy/dx qui «tend» vers $2x$. Cela suppose que l'on définisse la notion de «tendre vers», ce qu'ont fait Karl Weierstrass, Georg Cantor et Richard Dedekind.

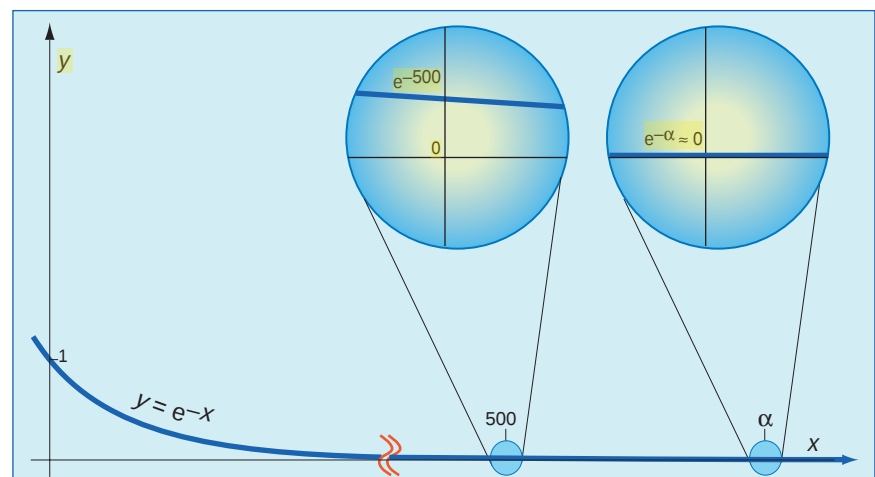
En substance, dire que le taux d'accroissement tend vers le nombre l , c'est dire que l'on peut rendre sa différence avec l inférieure en valeur absolue à une valeur strictement positive arbitraire, quelle qu'elle soit, à condition de choisir un dx inférieur en valeur absolue à une valeur frontière strictement positive adaptée à la première. Cette définition en termes de contrôle satisfait les mathématiciens. Toutefois, le théoricien des fondements remarque, qu'avec cette définition, une propriété de convergence vers une limite apparaît comme établie à l'issue de la résolution d'une infinité de petits problèmes posés par chaque degré de petitesse que l'on veut réaliser. Plus sobrement, elle est la propriété d'un objet supposé bien défini qu'est une fonction, c'est-à-dire une application de l'ensemble des réels dans lui-même, ou encore, selon la conception ensembliste, un ensemble fabriqué à partir d'ensembles infinis.

Ainsi, l'interprétation «moderne» du discours des pionniers de l'analyse infinitésimale le sauve de l'équation imparfaite, qui était l'un des problèmes, mais pas de la référence à une quantité douteuse. Seulement celle-ci, au lieu d'être infiniment petite, est infinie «tout court». À vrai dire, une difficulté de l'ordre de celle de l'équation imparfaite surgit aussi, mais elle

ne le fait que pour un spécialiste soucieux des problèmes de fondement. En acceptant les ensembles infinis actuels de points, le mathématicien est obligé d'accepter une «logique de l'infini», de prolonger l'usage de ses règles logiques de discours de manière systématique à l'infini.

Notamment, il décide que la phrase exprimant que telle fonction tend vers l en zéro, phrase qui évoque une infinité de problèmes paramétrés par un nombre réel strictement positif (pour tout réel strictement positif ε , il existe un réel strictement positif δ tel que, quel que soit x , le fait que la valeur absolue de x soit inférieure à δ implique que la valeur absolue de $f(x) - l$ est inférieure à ε) est ou bien vraie ou bien fausse, selon le principe du tiers exclu. (Le principe du tiers exclu, voir *L'infini, pierre de touche du constructivisme*, pages 74 à 81, énonce que si l'on considère une affirmation P portant sur des objets mathématiques, alors soit P soit non- P est vraie, et l'on exclut toute autre possibilité.)

Or cela ne va pas sans difficulté théorique, ne serait-ce que parce que l'on est amené à formaliser les mathématiques, et, par suite, à adopter un concept de déductibilité plus essentiel que le concept de vérité, concept pour lequel, on le sait depuis la démonstration par Gödel de son fameux théorème d'incomplétude, le tiers exclu ne vaut précisément pas (en 1930, Gödel a montré que dans tout système formel assez riche, on peut construire une proposition P telle que ni P ni non- P ne sont déductibles dans le système formel : une proposition «indécidable»).



2. LA FONCTION e^{-x} décroît très rapidement lorsque x augmente. Toutefois, si l'on prend un x fini, par exemple 500, en grossissant la courbe on notera une différence avec 0. En revanche, si l'on choisit un α infiniment grand, même en grossissant la courbe, la différence restera insaisissable. Selon cette intuition infinitésimale, on écrira $e^{-\alpha} \approx 0$.