



La théorie des ensembles

C'est principalement Georg Cantor (ci-contre) qui a eu l'idée d'introduire en mathématiques la notion d'ensemble quelconque d'objets absolument quelconques et de démontrer des résultats généraux sur ces d'ensembles. La conception ensembliste stipule que tous les objets et toutes les notions des mathématiques peuvent être exposés en termes d'ensembles, de sorte que la «théorie des ensembles» devient la théorie sur laquelle se fondent toutes les mathématiques.

Les raisonnements sur les ensembles que l'on fait naturellement en partant de l'intuition de ce qu'est une collection et de ce qu'est, pour un objet, que d'appartenir à une telle collection, conduisent à des paradoxes (antinomie de Russell, paradoxe de Cantor, etc.). Les mathématiciens du début du xx^e siècle ont alors été conduits à formaliser la théorie des ensembles, à la présenter comme une théorie logique abstraite gouvernant l'emploi de la relation d'appartenance notée $\in$, symbole qui, désormais, n'a plus un sens intuitif, mais qui est soumis à des règles d'emploi consignées dans des axiomes. La théorie formelle ainsi obtenue, et qui constitue la référence implicite des mathématiques depuis près d'un siècle, est la théorie ZFC (Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix).

Dans cette théorie, on définit la notion d'ensemble infini et d'ensemble fini comme Cantor en avait déjà eu l'idée : est infini un ensemble qui peut être mis en bijection avec une partie de lui différente de lui (ainsi, l'ensemble N des entiers naturels est mis en correspondance bijective avec l'ensemble P des nombres pairs par l'application $n \rightarrow 2n$) ; est fini un ensemble qui n'est pas infini. À tout ensemble, même infini, est associé un «cardinal», qui «compte» le nombre de ses éléments : ainsi N a «aleph 0» éléments, comme $\{0,1\}$ en a deux. Une application $f : E \rightarrow F$, de source l'ensemble E et de but l'ensemble F , est définie comme un triplet (E, G, F) où $G \subset E \times F$ est constitué de couples du type (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$, le graphe G ayant été choisi tel qu'à tout $x \in E$ peut être associé un unique $y \in F$ tel que $(x, y) \in G$ (le y en question s'appelle alors *image* de x). Si E est infini, le graphe G est alors, lui aussi, infini.

La reconquête de l'indéfini

Cette situation laissait soupçonner que l'on aurait pu employer le formalisme issu de la théorie des ensembles et les formalismes associés pour justifier le mieux possible le discours des pionniers, plutôt que pour le disqualifier, comme le fait dans une certaine mesure la conception ensembliste que nous venons d'évoquer. Or, dans les années 1960, une telle réhabilitation a été proposée par le mathématicien américain Abraham Robinson, spécialiste de la branche alors triomphante de la logique mathématique nommée théorie des modèles.

La réinterprétation de Robinson du calcul et du discours des pionniers est en substance la suivante : elle sauve l'idée d'infiniment petit, en demandant aux mathématiciens de penser qu'il y a plus de nombres réels qu'ils ne le croyaient. Ou plutôt, les réels connus sont plongés dans un système plus vaste, qu'on peut nommer système des «hyperréels», et contenant des éléments strictement positifs plus petits que tout élément strictement positif du système de base, qu'on dénommera désormais système des

réels standard. Toute la subtilité de l'opération réside alors dans ceci que le nouveau système de nombres est une «extension élémentaire» du premier, c'est-à-dire qu'il en est jusqu'à un certain point un double, un élargissement non essentiel.

En d'autres termes, les nouveaux objets ne peuvent être caractérisés en fonction des réels standard et des moyens discursifs qui les accompagnent. Ils sont des entités supplémentaires, indéterminées, simplement choisies de façon à procurer, à toute une classe de relations définies sur le système de base, des objets-limite dominant tous les objets standard suivant ces relations. Pour donner un exemple, disons que la relation $\leq$ a la propriété suivante : pour tout ensemble fini $\{x_1, \dots, x_p, \dots, x_n\}$ de réels standard, on peut trouver un réel standard y majorant chacun des x_i . Le processus d'élargissement de Robinson nous garantit alors dans le système *R des hyperréels l'existence d'un μ tel que $x < \mu$ pour tout x standard, c'est-à-dire d'un μ «infiniment grand».

Pour construire les hyperréels, Robinson se fonde sur l'axiome du choix. Cet axiome – introduit explicitement par Zermelo en 1908 – pose,

pour le résumer de manière commode, qu'«il existe» une fonction choisissant exactement un élément dans tout ensemble d'une famille infinie d'ensembles non vides donnés. Autrement dit, si l'on considère une famille d'ensembles non vides $(X_i) - i$ variant dans l'ensemble I des indices –, il y a une fonction qui «prend» exactement un élément dans chaque ensemble X_i , qui à chaque indice i de l'ensemble d'indices I associe un élément choisi dans X_i . Toutefois, le «choix» ainsi exprimé par la fonction censée exister n'est ni déterminé ni déterminable au-delà de l'axiome qui pose son existence. On ne peut pas décrire cette fonction autrement que par la sélection qu'elle opère, on ne peut pas l'exprimer par rapport aux objets déjà connus de la situation où elle intervient.

Néanmoins, la simple existence de la fonction est intéressante pour le mathématicien : elle lui garantit que certaines constructions ensemblistes sont possibles, que certains objets commodes peuvent être admis. Par exemple, elle permet l'introduction d'une base à laquelle rapporter tous les vecteurs de n'importe quel espace vectoriel.

Malgré les services rendus par cet axiome, plusieurs mathématiciens l'ont contesté au début du XX^e siècle. Ils estimaient que l'axiome de choix affirmait une existence trop idéale et trop peu contrôlée. Robinson justifie *a posteriori* cet axiome en montrant que le caractère peu contrôlé et indéterminé des objets introduits par l'axiome du choix peut être intéressant en lui-même.

L'axiome du choix amène la mathématique à jouer avec des objets dont elle n'a pas suivi le protocole de création, des objets qui s'ajoutent à son paysage, qui lui sont uniquement raccordés par une propriété miraculeuse. Les infiniment petits de Robinson sont justement de tels objets : leur statut se définit en termes de l'infinité des objets standard, mais ils sont pour le reste indéterminés. Robinson justifie le discours des pionniers en donnant un crédit ensembliste irréfutable aux infiniment petits (et, du coup, aux infiniment grands), mais en ajoutant à la figure de l'infini de totalité celle d'un infini-indéfini, d'un infiniment indéfini en quelque sorte (ou plutôt, cette figure, il ne l'ajoute pas, il la met en relief). C'est d'ailleurs en termes de cette figure que l'équation imparfaite est aussi interprétée : on écrira avec Robinson $dy/dx \approx 2x$, le signe $\approx$ exprimant que