



La théorie des ensembles

C'est principalement Georg Cantor (ci-contre) qui a eu l'idée d'introduire en mathématiques la notion d'ensemble quelconque d'objets absolument quelconques et de démontrer des résultats généraux sur ces d'ensembles. La conception ensembliste stipule que tous les objets et toutes les notions des mathématiques peuvent être exposés en termes d'ensembles, de sorte que la «théorie des ensembles» devient la théorie sur laquelle se fondent toutes les mathématiques.

Les raisonnements sur les ensembles que l'on fait naturellement en partant de l'intuition de ce qu'est une collection et de ce qu'est, pour un objet, que d'appartenir à une telle collection, conduisent à des paradoxes (antinomie de Russell, paradoxe de Cantor, etc.). Les mathématiciens du début du xx^e siècle ont alors été conduits à formaliser la théorie des ensembles, à la présenter comme une théorie logique abstraite gouvernant l'emploi de la relation d'appartenance notée $\in$, symbole qui, désormais, n'a plus un sens intuitif, mais qui est soumis à des règles d'emploi consignées dans des axiomes. La théorie formelle ainsi obtenue, et qui constitue la référence implicite des mathématiques depuis près d'un siècle, est la théorie ZFC (Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix).

Dans cette théorie, on définit la notion d'ensemble infini et d'ensemble fini comme Cantor en avait déjà eu l'idée : est infini un ensemble qui peut être mis en bijection avec une partie de lui différente de lui (ainsi, l'ensemble N des entiers naturels est mis en correspondance bijective avec l'ensemble P des nombres pairs par l'application $n \rightarrow 2n$) ; est fini un ensemble qui n'est pas infini. À tout ensemble, même infini, est associé un «cardinal», qui «compte» le nombre de ses éléments : ainsi N a «aleph 0» éléments, comme $\{0,1\}$ en a deux. Une application $f : E \rightarrow F$, de source l'ensemble E et de but l'ensemble F , est définie comme un triplet (E, G, F) où $G \subset E \times F$ est constitué de couples du type (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$, le graphe G ayant été choisi tel qu'à tout $x \in E$ peut être associé un unique $y \in F$ tel que $(x, y) \in G$ (le y en question s'appelle alors *image* de x). Si E est infini, le graphe G est alors, lui aussi, infini.

La reconquête de l'indéfini

Cette situation laissait soupçonner que l'on aurait pu employer le formalisme issu de la théorie des ensembles et les formalismes associés pour justifier le mieux possible le discours des pionniers, plutôt que pour le disqualifier, comme le fait dans une certaine mesure la conception ensembliste que nous venons d'évoquer. Or, dans les années 1960, une telle réhabilitation a été proposée par le mathématicien américain Abraham Robinson, spécialiste de la branche alors triomphante de la logique mathématique nommée théorie des modèles.

La réinterprétation de Robinson du calcul et du discours des pionniers est en substance la suivante : elle sauve l'idée d'infiniment petit, en demandant aux mathématiciens de penser qu'il y a plus de nombres réels qu'ils ne le croyaient. Ou plutôt, les réels connus sont plongés dans un système plus vaste, qu'on peut nommer système des «hyperréels», et contenant des éléments strictement positifs plus petits que tout élément strictement positif du système de base, qu'on dénommera désormais système des

réels standard. Toute la subtilité de l'opération réside alors dans ceci que le nouveau système de nombres est une «extension élémentaire» du premier, c'est-à-dire qu'il en est jusqu'à un certain point un double, un élargissement non essentiel.

En d'autres termes, les nouveaux objets ne peuvent être caractérisés en fonction des réels standard et des moyens discursifs qui les accompagnent. Ils sont des entités supplémentaires, indéterminées, simplement choisies de façon à procurer, à toute une classe de relations définies sur le système de base, des objets-limite dominant tous les objets standard suivant ces relations. Pour donner un exemple, disons que la relation $\leq$ a la propriété suivante : pour tout ensemble fini $\{x_1, \dots, x_n\}$ de réels standard, on peut trouver un réel standard y majorant chacun des x_i . Le processus d'élargissement de Robinson nous garantit alors dans le système *R des hyperréels l'existence d'un μ tel que $x < \mu$ pour tout x standard, c'est-à-dire d'un μ «infiniment grand».

Pour construire les hyperréels, Robinson se fonde sur l'axiome du choix. Cet axiome – introduit explicitement par Zermelo en 1908 – pose,

pour le résumer de manière commode, qu'«il existe» une fonction choisissant exactement un élément dans tout ensemble d'une famille infinie d'ensembles non vides donnés. Autrement dit, si l'on considère une famille d'ensembles non vides $(X_i)_{i \in I}$ variant dans l'ensemble I des indices, il y a une fonction qui «prend» exactement un élément dans chaque ensemble X_i , qui à chaque indice i de l'ensemble d'indices I associe un élément choisi dans X_i . Toutefois, le «choix» ainsi exprimé par la fonction censée exister n'est ni déterminé ni déterminable au-delà de l'axiome qui pose son existence. On ne peut pas décrire cette fonction autrement que par la sélection qu'elle opère, on ne peut pas l'exprimer par rapport aux objets déjà connus de la situation où elle intervient.

Néanmoins, la simple existence de la fonction est intéressante pour le mathématicien : elle lui garantit que certaines constructions ensemblistes sont possibles, que certains objets commodes peuvent être admis. Par exemple, elle permet l'introduction d'une base à laquelle rapporter tous les vecteurs de n'importe quel espace vectoriel.

Malgré les services rendus par cet axiome, plusieurs mathématiciens l'ont contesté au début du XX^e siècle. Ils estimaient que l'axiome de choix affirmait une existence trop idéale et trop peu contrôlée. Robinson justifie *a posteriori* cet axiome en montrant que le caractère peu contrôlé et indéterminé des objets introduits par l'axiome du choix peut être intéressant en lui-même.

L'axiome du choix amène la mathématique à jouer avec des objets dont elle n'a pas suivi le protocole de création, des objets qui s'ajoutent à son paysage, qui lui sont uniquement raccordés par une propriété miraculeuse. Les infiniment petits de Robinson sont justement de tels objets : leur statut se définit en termes de l'infinité des objets standard, mais ils sont pour le reste indéterminés. Robinson justifie le discours des pionniers en donnant un crédit ensembliste irréfutable aux infiniment petits (et, du coup, aux infiniment grands), mais en ajoutant à la figure de l'infini de totalité celle d'un infini-indéfini, d'un infiniment indéfini en quelque sorte (ou plutôt, cette figure, il ne l'ajoute pas, il la met en relief). C'est d'ailleurs en termes de cette figure que l'équation imparfaite est aussi interprétée : on écrira avec Robinson $dy/dx \approx 2x$, le signe $\approx$ exprimant que

la différence est infiniment petite, c'est-à-dire qu'elle est inférieure en valeur absolue à tout nombre standard. De manière philosophique, on peut dire que dy/dx ne diffère de $2x$ que d'un «indéfinissablement petit».

La syntaxe de l'indéfini

Dans les années 1970, le mathématicien américain Edward Nelson a proposé une nouvelle théorie des ensembles qu'il nomme théorie interne des ensembles, ou IST (pour *Internal Set Theory*). La théorie IST étend la théorie formelle des ensembles usuels, la théorie Zermelo-Fraenkel avec choix, ou ZFC. Cette nouvelle théorie des ensembles fait intervenir, en plus des symboles fondamentaux de l'égalité ($=$) et de l'appartenance ($\in$), un nouveau prédicat nommé st (comme standard). À l'inverse de $=$ ou de $\in$, qui sont des symboles à deux places ($x = y$, $x \in y$), le prédicat st est un prédicat à une place, c'est-à-dire qu'il affirme une propriété sur un objet (on écrit $st(x)$ pour x est standard). Cela signifie qu'on distinguera désormais, parmi tous les ensembles de l'univers des ensembles, ceux qui sont standard et ceux qui ne le sont pas (c'est un peu comme si la télévision ensembliste était passée du noir et blanc à la couleur, nous révélant des distinctions nouvelles).

Le prédicat st ne peut être réduit aux notions ensemblistes classiques. Sa signification est régie par trois nouveaux schémas d'axiome qui ont pour effet de lui faire exprimer plus ou moins la notion d'objet assignable, saisissable, logiquement connu dans le paysage ensembliste. Ce prédicat permet de distinguer les entités qui tiennent le rôle des infiniment petits chez Robinson. Ainsi, dans la mathématique nelsonienne, les réels infiniment petits non nuls sont des réels ne satisfaisant pas le prédicat st , des réels non standard.

Cette approche de Nelson met en évidence un rapport entre le fini et le

standard. Elle laisse entendre que les objets non standard sont là «à cause» de l'infini de totalité, et que, en un certain sens, tout ce qui est assignable tient dans le fini. Bien que la théorie IST qu'il propose soit une extension de la théorie classique, et puisse donc être considérée comme porteuse du même message logique et ontologique, elle nous engage à voir autrement dans l'univers des ensembles la répartition du fini et de l'infini, et leur rapport.

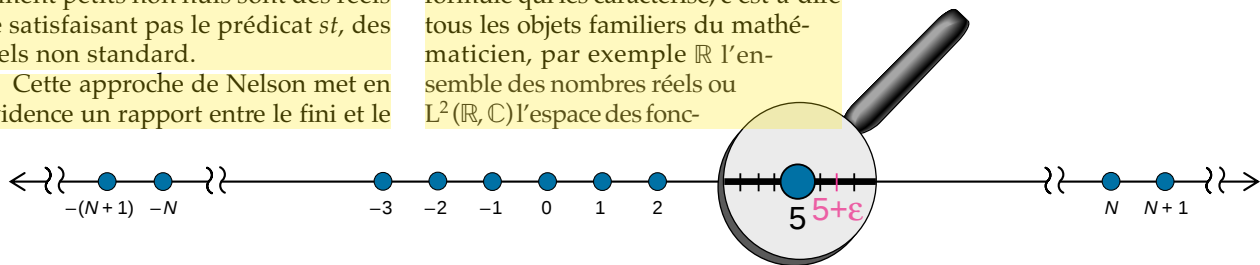
Les deux enseignements de la théorie IST sur le fini et l'infini sont les suivants : premièrement, tout ensemble infini contient un élément non standard, deuxièmement il y a un ensemble fini qui contient tous les objets standard de l'univers. Ces deux assertions sont des théorèmes qui découlent à peu près directement des axiomes spécifiques imposés au prédicat st par lesquels E. Nelson a complété la théorie des ensembles.

La première assertion se comprend au fond très bien : dans un ensemble que nous tenons pour infini, comment pourrait-il ne pas apparaître des objets échappant à notre contrôle logique, c'est-à-dire des objets non assignables, non standard ? La conclusion que tire le théorème semble être une simple conclusion raisonnable, dictée par la connaissance de notre finitude (bien que, naturellement, une telle considération métaphysique ne figure nullement parmi les justifications du dispositif de Nelson ; des justifications, à vrai dire, il n'en donne pas, c'est en cela notamment que consiste la démarche axiomatique).

La seconde assertion est plus surprenante : parmi les objets standard figurent, Nelson prend soin de nous le faire remarquer, tous les objets définissables dans la théorie de base des ensembles (classique) au moyen d'une formule qui les caractérise, c'est-à-dire tous les objets familiers du mathématicien, par exemple $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels ou $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'espace des fonc-

tions complexes de carré sommable sur $\mathbb{R}$ (les fonctions de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{C}$ dont l'intégrale sur $\mathbb{R}$ du module au carré est finie) ; mais aussi, bien sûr, les entiers «connus», 0, 1, 2, et ainsi de suite. La collection des objets standard contient donc toute une faune, apparemment infinie, d'objets qui sont eux-mêmes susceptibles d'être idéaux (c'est-à-dire que l'on peut penser, mais non construire, parce qu'ils se situent par principe au-delà de toute saisie immédiate, comme $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$) et du coup infinis. Néanmoins, ce que dit le théorème, c'est que la collection totale des objets de cette sorte peut être intégrée à un ensemble fini, et donc, en un sens, demeure justiciable d'un traitement analogue à celui des objets finis. Par exemple, on pourra former la somme finie d'une classe de nombres réels contenant tous les réels standard.

Cette affirmation contredit l'intuition qui résulte de la construction de Robinson : pour lui, les nombres réels standard sont les nombres usuels, et l'on n'a obtenu un système avec des nombres infiniment petits et grands qu'en ajoutant de nouveaux nombres à ces nombres usuels ; il y a donc une infinité continue de réels standard. Le point de vue de Nelson est autre : nous avons des nombres infiniment petits uniquement parce que nous reconnaissons que, parmi les nombres réels, figurent forcément des éléments insaisissables, non assignables, parce que nous entrons dans la logique de cette distinction entre assignables et non assignables. C'est cette distinction qui différencie fonctionnellement les nombres réels entre eux et qui dégage la possibilité «grammaticale» de l'infiniment petit ou grand. Elle fait aussi apparaître, à l'intérieur des réels, une collection de réels standard qui se laisse inclure dans une partie de $\mathbb{R}$ que l'on peut traiter comme une partie finie.



3. LES NOMBRES RÉELS INCLUENT les nombres entiers, positifs et négatifs, les nombres rationnels et les nombres irrationnels. Ces nombres réels peuvent être représentés par des points sur une droite nommée la droite réelle. L'analyse non standard nous conduit à envisager, autour de 0, tout un «halo» de nombres non standard infiniment petits. Plus généralement, chaque nombre réel usuel, comme $\sqrt{2}$ ou 5 sur le schéma, est environné d'un tel halo, consti-

tué de nombres de type $5 + \varepsilon$ où ε est un infiniment petit. Mais l'analyse non standard nous fait voir aussi, sur la droite réelle des nombres non limités, comme N , $-N$, $N + 1$, $-(N + 1)$ sur le schéma, qui sont supérieurs à tout nombre standard (infiniment grands positifs) ou inférieurs à tout nombre standard (infiniment grands négatifs) ; néanmoins aucun de ces nombres ne peut être dit «compter» l'infinité des points de la droite.