

la différence est infiniment petite, c'est-à-dire qu'elle est inférieure en valeur absolue à tout nombre standard. De manière philosophique, on peut dire que dy/dx ne diffère de $2x$ que d'un «indéfinissablement petit».

La syntaxe de l'indéfini

Dans les années 1970, le mathématicien américain Edward Nelson a proposé une nouvelle théorie des ensembles qu'il nomme théorie interne des ensembles, ou IST (pour *Internal Set Theory*). La théorie IST étend la théorie formelle des ensembles usuels, la théorie Zermelo-Fraenkel avec choix, ou ZFC. Cette nouvelle théorie des ensembles fait intervenir, en plus des symboles fondamentaux de l'égalité ($=$) et de l'appartenance ($\in$), un nouveau prédicat nommé st (comme standard). À l'inverse de $=$ ou de $\in$, qui sont des symboles à deux places ($x = y$, $x \in y$), le prédicat st est un prédicat à une place, c'est-à-dire qu'il affirme une propriété sur un objet (on écrit $st(x)$ pour x est standard). Cela signifie qu'on distinguera désormais, parmi tous les ensembles de l'univers des ensembles, ceux qui sont standard et ceux qui ne le sont pas (c'est un peu comme si la télévision ensembliste était passée du noir et blanc à la couleur, nous révélant des distinctions nouvelles).

Le prédicat st ne peut être réduit aux notions ensemblistes classiques. Sa signification est régie par trois nouveaux schémas d'axiome qui ont pour effet de lui faire exprimer plus ou moins la notion d'objet assignable, saisissable, logiquement connu dans le paysage ensembliste. Ce prédicat permet de distinguer les entités qui tiennent le rôle des infiniment petits chez Robinson. Ainsi, dans la mathématique nelsonienne, les réels infiniment petits non nuls sont des réels ne satisfaisant pas le prédicat st , des réels non standard.

Cette approche de Nelson met en évidence un rapport entre le fini et le

standard. Elle laisse entendre que les objets non standard sont là «à cause» de l'infini de totalité, et que, en un certain sens, tout ce qui est assignable tient dans le fini. Bien que la théorie IST qu'il propose soit une extension de la théorie classique, et puisse donc être considérée comme porteuse du même message logique et ontologique, elle nous engage à voir autrement dans l'univers des ensembles la répartition du fini et de l'infini, et leur rapport.

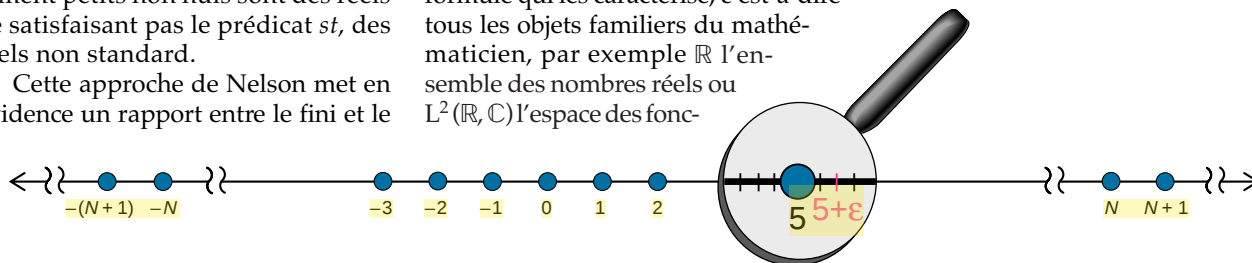
Les deux enseignements de la théorie IST sur le fini et l'infini sont les suivants : premièrement, tout ensemble infini contient un élément non standard, deuxièmement il y a un ensemble fini qui contient tous les objets standard de l'univers. Ces deux assertions sont des théorèmes qui découlent à peu près directement des axiomes spécifiques imposés au prédicat st par lesquels E. Nelson a complété la théorie des ensembles.

La première assertion se comprend au fond très bien : dans un ensemble que nous tenons pour infini, comment pourrait-il ne pas apparaître des objets échappant à notre contrôle logique, c'est-à-dire des objets non assignables, non standard ? La conclusion que tire le théorème semble être une simple conclusion raisonnable, dictée par la connaissance de notre finitude (bien que, naturellement, une telle considération métaphysique ne figure nullement parmi les justifications du dispositif de Nelson ; des justifications, à vrai dire, il n'en donne pas, c'est en cela notamment que consiste la démarche axiomatique).

La seconde assertion est plus surprenante : parmi les objets standard figurent, Nelson prend soin de nous le faire remarquer, tous les objets définissables dans la théorie de base des ensembles (classique) au moyen d'une formule qui les caractérise, c'est-à-dire tous les objets familiers du mathématicien, par exemple $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels ou $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'espace des fonc-

tions complexes de carré sommable sur $\mathbb{R}$ (les fonctions de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{C}$ dont l'intégrale sur $\mathbb{R}$ du module au carré est finie) ; mais aussi, bien sûr, les entiers «connus», 0, 1, 2, et ainsi de suite. La collection des objets standard contient donc toute une faune, apparemment infinie, d'objets qui sont eux-mêmes susceptibles d'être idéaux (c'est-à-dire que l'on peut penser, mais non construire, parce qu'ils se situent par principe au-delà de toute saisie immédiate, comme $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$) et du coup infinis. Néanmoins, ce que dit le théorème, c'est que la collection totale des objets de cette sorte peut être intégrée à un ensemble fini, et donc, en un sens, demeure justiciable d'un traitement analogue à celui des objets finis. Par exemple, on pourra former la somme finie d'une classe de nombres réels contenant tous les réels standard.

Cette affirmation contredit l'intuition qui résulte de la construction de Robinson : pour lui, les nombres réels standard sont les nombres usuels, et l'on n'a obtenu un système avec des nombres infiniment petits et grands qu'en ajoutant de nouveaux nombres à ces nombres usuels ; il y a donc une infinité continue de réels standard. Le point de vue de Nelson est autre : nous avons des nombres infiniment petits uniquement parce que nous reconnaissons que, parmi les nombres réels, figurent forcément des éléments insaisissables, non assignables, parce que nous entrons dans la logique de cette distinction entre assignables et non assignables. C'est cette distinction qui différencie fonctionnellement les nombres réels entre eux et qui dégage la possibilité «grammaticale» de l'infiniment petit ou grand. Elle fait aussi apparaître, à l'intérieur des réels, une collection de réels standard qui se laisse inclure dans une partie de $\mathbb{R}$ que l'on peut traiter comme une partie finie.



3. LES NOMBRES RÉELS INCLUENT les nombres entiers, positifs et négatifs, les nombres rationnels et les nombres irrationnels. Ces nombres réels peuvent être représentés par des points sur une droite nommée la droite réelle. L'analyse non standard nous conduit à envisager, autour de 0, tout un «halo» de nombres non standard infiniment petits. Plus généralement, chaque nombre réel usuel, comme $\sqrt{2}$ ou 5 sur le schéma, est environné d'un tel halo, consti-

tué de nombres de type $5 + \varepsilon$ où ε est un infiniment petit. Mais l'analyse non standard nous fait voir aussi, sur la droite réelle des nombres non limités, comme N , $-N$, $N + 1$, $-(N + 1)$ sur le schéma, qui sont supérieurs à tout nombre standard (infiniment grands positifs) ou inférieurs à tout nombre standard (infiniment grands négatifs) ; néanmoins aucun de ces nombres ne peut être dit «compter» l'infinité des points de la droite.

Dans ce contexte de la théorie dénommée IST, gardons à l'esprit que fini ne signifie pas intuitivement fini, absolument fini, fini au sens des ordinateurs ou même de l'intuition ordinaire des nombres entiers. Fini a le sens que lui donne la théorie des ensembles ZFC, c'est-à-dire le sens formel de ce qui peut être mis en bijection avec une partie propre de soi. Un ensemble fini en ce sens peut ne pas paraître fini à notre intuition. Ainsi, lorsque μ est un entier infiniment grand, le segment $[0, \mu]$ est infini à nos yeux, mais fini du point de vue des manipulations mathématiques. C'est toute la difficulté qu'avaient déjà explorée les pionniers de la théorie des modèles et que Robinson avait exploitée pour faire émerger des réels infiniment petits. On peut, si l'on désire se raccrocher à une signification intuitive absolue du fini, nommer «hyperfini» ce fini qui n'est fini que formellement, au sens de la théorie des ensembles. Les objets standard restent dans l'orbe de l'hyperfini.

Assignable et constructif

La manière dont la théorie IST relie l'intention justificatrice de l'analyse non standard à l'égard du discours des pionniers du calcul infinitésimal et la question générale du fini et de l'infini prépare et éclaire l'étape suivante. Celle-ci consiste à mettre directement en rapport l'analyse non standard et les idées «constructivistes». Le constructivisme accorde une importance décisive à la distinction entre ce qui peut être effectivement construit, ou devrait pourvoir l'être en principe, et ce qui se situe au-delà, ce qui est «idéel». En effet, nous commençons à le comprendre, ce qui permet d'avoir des nombres infiniment petits dans la mathématique du continu sans engager les calculs sur les nombres réels dans des paradoxes, c'est de disposer d'un statut d'entité non assignable pour certains objets, certains nombres.

Ce statut, Robinson l'obtient en faisant jouer ensemble deux modèles de la même théorie dont l'un est une extension élémentaire de l'autre, et E. Nelson l'obtient en installant dans le langage une notion d'entité assignable. Le résultat de cette démarche est de lier l'assignable au fini, le non-assignable à l'infini.

Pourquoi, dans ces conditions, ne pas tenter de se fonder sur ce qui semble être la figure contemporaine de la notion d'entité assignable, et

RÉCURRENCE INTERNE ET EXTERNE

Le principe de récurrence nous dit que si une propriété $P(n)$ est vraie pour $n = 0$ et si elle est héréditaire (la vérité de $P(n)$ entraîne celle de $P(n + 1)$, alors elle est vraie pour tout n . Ce principe reste valable dans l'analyse non standard «nelsonienne», mais seulement pour les propriétés dites *internes*, qui ne font pas intervenir la notion d'objet standard (le prédicat *st*). Pour une propriété externe jouant sur la nouvelle notion, sachant que $P(0)$ est vraie et que, pour le standard, $P(n)$ entraîne $P(n + 1)$, on pourra seulement conclure que $P(n)$ est vraie pour tout entier standard, la valeur de vérité de la propriété P pour les entiers infiniment grands restant parfaitement indéterminée.

poser qu'est assignable ce qui est représentable par l'informatique? Parce que cette notion est trop technique et contingente : elle semble dépendre d'un état actuel de la puissance des machines et de la taille des mémoires, par exemple. Les notions plus théoriques d'objets constructibles au sens de Brouwer (c'est-à-dire d'objets dont l'élaboration apparaît comme réalisable à l'intuition qui accompagne la succession indéfinie des nombres entiers) ou de calculabilité (dans les années 1930, des mathématiciens ont introduit cette notion en cherchant à préciser la notion intuitive de calcul) fournissent exactement ce qu'il est naturel de rechercher : des concepts d'entité assignable assez généraux pour dépasser les limites contingentes de la technique, mais qui n'entrent pourtant pas dans un type d'idéalité comparable à celui des ensembles infinis de nombres $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$. D'où l'idée de fonder un discours d'analyse non standard dont l'équation de base serait *standard = constructif*.

Il revient à Georges Reeb d'avoir eu l'idée générale et systématique d'une telle stratégie, et également d'avoir compris que c'était toujours de cela qu'il s'était agi dans l'analyse non standard historique.

Il s'agit de comprendre que tout ce qui est nécessaire au développement de l'analyse non standard est un entier infiniment grand. On doit s'être également muni, bien entendu, d'une règle du jeu instruisant sur la façon de raisonner et de calculer avec lui, sur le type d'entités que l'on peut construire à partir des nombres entiers divisés en finis et infinis dont on dispose ; enfin, on doit se munir d'un bon motif «phi-

losophico-fondationnel» pour ajouter crédit à tout ce montage intellectuel faisant intervenir un nombre entier infiniment grand. Dans ces conditions, on peut introduire un système de nombres comportant des infiniment petits et grands qui permet de faire de l'analyse. Le texte qui formule le programme d'une mathématique non standard fondée sur l'entier infiniment grand tout en interprétant ce dernier comme entier non constructif est l'article *La mathématique non standard, vieille de soixante ans?* de Georges Reeb, publié en 1979.

Pour Reeb, nous devons reconnaître que la boîte rassemblant l'ensemble des entiers du formaliste, le $\mathbb{N}$ obéissant au principe du tiers exclu, que l'on définit comme le plus petit ensemble infini en théorie des ensembles, n'a aucune raison de contenir seulement les entiers intuitifs, les entiers qui viennent à leur heure au fil de l'énumération 0, 1, 2, etc. C'est ce que les inlassables objections de Brouwer au formalisme naissant, au début de XX^e siècle, auraient montré sans ambiguïté. Brouwer a critiqué la mathématique ensembliste et formelle qui s'affirmait sous ses yeux, et a proposé une autre orientation, qu'il nomma «intuitionniste». Selon Reeb, Brouwer avait raison de considérer qu'une preuve formelle de la fausseté de la proposition «quel que soit l'entier n , la propriété $P(n)$ est vraie» – le plus probablement obtenue au moyen d'un raisonnement par l'absurde – n'apportait pas la garantie que l'on sache indiquer la construction d'un entier N tel que non $P(N)$ soit vraie. Toutefois, dans ces conditions, l'entier n tel que non $P(n)$ est vraie, dont la théorie affirme l'existence via la preuve formelle, semble avoir le statut d'un entier «au-delà» des entiers effectifs : un tel entier est réputé «exister» parce qu'une phrase de la théorie affirmant son existence est démontrée, mais on ne peut l'identifier avec aucun entier que nous sachions construire. Il est donc «plus grand» que tous ceux-ci.

Dans le raisonnement de Reeb, l'entier infiniment grand est introduit par un étrange raisonnement, qui accepte l'existence de la théorie formelle des entiers et envisage même la mythique collection de nombres satisfaisant cette théorie, mais qui, en même temps, débat sur ce que cette collection peut et doit contenir comme éléments, en comparant la notion formelle d'entier à sa notion intuitive. Le résultat