

Dans ce contexte de la théorie dénommée IST, gardons à l'esprit que fini ne signifie pas intuitivement fini, absolument fini, fini au sens des ordinateurs ou même de l'intuition ordinaire des nombres entiers. Fini a le sens que lui donne la théorie des ensembles ZFC, c'est-à-dire le sens formel de ce qui peut être mis en bijection avec une partie propre de soi. Un ensemble fini en ce sens peut ne pas paraître fini à notre intuition. Ainsi, lorsque μ est un entier infiniment grand, le segment $[0, \mu]$ est infini à nos yeux, mais fini du point de vue des manipulations mathématiques. C'est toute la difficulté qu'avaient déjà explorée les pionniers de la théorie des modèles et que Robinson avait exploitée pour faire émerger des réels infiniment petits. On peut, si l'on désire se raccrocher à une signification intuitive absolue du fini, nommer «hyperfini» ce fini qui n'est fini que formellement, au sens de la théorie des ensembles. Les objets standard restent dans l'orbe de l'hyperfini.

Assignable et constructif

La manière dont la théorie IST relie l'intention justificatrice de l'analyse non standard à l'égard du discours des pionniers du calcul infinitésimal et la question générale du fini et de l'infini prépare et éclaire l'étape suivante. Celle-ci consiste à mettre directement en rapport l'analyse non standard et les idées «constructivistes». Le constructivisme accorde une importance décisive à la distinction entre ce qui peut être effectivement construit, ou devrait pourvoir l'être en principe, et ce qui se situe au-delà, ce qui est «idéel». En effet, nous commençons à le comprendre, ce qui permet d'avoir des nombres infiniment petits dans la mathématique du continu sans engager les calculs sur les nombres réels dans des paradoxes, c'est de disposer d'un statut d'entité non assignable pour certains objets, certains nombres.

Ce statut, Robinson l'obtient en faisant jouer ensemble deux modèles de la même théorie dont l'un est une extension élémentaire de l'autre, et E. Nelson l'obtient en installant dans le langage une notion d'entité assignable. Le résultat de cette démarche est de lier l'assignable au fini, le non-assignable à l'infini.

Pourquoi, dans ces conditions, ne pas tenter de se fonder sur ce qui semble être la figure contemporaine de la notion d'entité assignable, et

RÉCURRENCE INTERNE ET EXTERNE

Le principe de récurrence nous dit que si une propriété $P(n)$ est vraie pour $n = 0$ et si elle est héréditaire (la vérité de $P(n)$ entraîne celle de $P(n + 1)$, alors elle est vraie pour tout n . Ce principe reste valable dans l'analyse non standard «nelsonienne», mais seulement pour les propriétés dites *internes*, qui ne font pas intervenir la notion d'objet standard (le prédicat *st*). Pour une propriété externe jouant sur la nouvelle notion, sachant que $P(0)$ est vraie et que, pour le standard, $P(n)$ entraîne $P(n + 1)$, on pourra seulement conclure que $P(n)$ est vraie pour tout entier standard, la valeur de vérité de la propriété P pour les entiers infiniment grands restant parfaitement indéterminée.

poser qu'est assignable ce qui est représentable par l'informatique? Parce que cette notion est trop technique et contingente : elle semble dépendre d'un état actuel de la puissance des machines et de la taille des mémoires, par exemple. Les notions plus théoriques d'objets constructibles au sens de Brouwer (c'est-à-dire d'objets dont l'élaboration apparaît comme réalisable à l'intuition qui accompagne la succession indéfinie des nombres entiers) ou de calculabilité (dans les années 1930, des mathématiciens ont introduit cette notion en cherchant à préciser la notion intuitive de calcul) fournissent exactement ce qu'il est naturel de rechercher : des concepts d'entité assignable assez généraux pour dépasser les limites contingentes de la technique, mais qui n'entrent pourtant pas dans un type d'idéalité comparable à celui des ensembles infinis de nombres $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$. D'où l'idée de fonder un discours d'analyse non standard dont l'équation de base serait *standard = constructif*.

Il revient à Georges Reeb d'avoir eu l'idée générale et systématique d'une telle stratégie, et également d'avoir compris que c'était toujours de cela qu'il s'était agi dans l'analyse non standard historique.

Il s'agit de comprendre que tout ce qui est nécessaire au développement de l'analyse non standard est un entier infiniment grand. On doit s'être également muni, bien entendu, d'une règle du jeu instruisant sur la façon de raisonner et de calculer avec lui, sur le type d'entités que l'on peut construire à partir des nombres entiers divisés en finis et infinis dont on dispose ; enfin, on doit se munir d'un bon motif «phi-

losophico-fondationnel» pour ajouter crédit à tout ce montage intellectuel faisant intervenir un nombre entier infiniment grand. Dans ces conditions, on peut introduire un système de nombres comportant des infiniment petits et grands qui permet de faire de l'analyse. Le texte qui formule le programme d'une mathématique non standard fondée sur l'entier infiniment grand tout en interprétant ce dernier comme entier non constructif est l'article *La mathématique non standard, vieille de soixante ans?* de Georges Reeb, publié en 1979.

Pour Reeb, nous devons reconnaître que la boîte rassemblant l'ensemble des entiers du formaliste, le $\mathbb{N}$ obéissant au principe du tiers exclu, que l'on définit comme le plus petit ensemble infini en théorie des ensembles, n'a aucune raison de contenir seulement les entiers intuitifs, les entiers qui viennent à leur heure au fil de l'énumération 0, 1, 2, etc. C'est ce que les inlassables objections de Brouwer au formalisme naissant, au début de XX^e siècle, auraient montré sans ambiguïté. Brouwer a critiqué la mathématique ensembliste et formelle qui s'affirmait sous ses yeux, et a proposé une autre orientation, qu'il nomma «intuitionniste». Selon Reeb, Brouwer avait raison de considérer qu'une preuve formelle de la fausseté de la proposition «quel que soit l'entier n , la propriété $P(n)$ est vraie» – le plus probablement obtenue au moyen d'un raisonnement par l'absurde – n'apportait pas la garantie que l'on sache indiquer la construction d'un entier N tel que non $P(N)$ soit vraie. Toutefois, dans ces conditions, l'entier n tel que non $P(n)$ est vraie, dont la théorie affirme l'existence via la preuve formelle, semble avoir le statut d'un entier «au-delà» des entiers effectifs : un tel entier est réputé «exister» parce qu'une phrase de la théorie affirmant son existence est démontrée, mais on ne peut l'identifier avec aucun entier que nous sachions construire. Il est donc «plus grand» que tous ceux-ci.

Dans le raisonnement de Reeb, l'entier infiniment grand est introduit par un étrange raisonnement, qui accepte l'existence de la théorie formelle des entiers et envisage même la mythique collection de nombres satisfaisant cette théorie, mais qui, en même temps, débat sur ce que cette collection peut et doit contenir comme éléments, en comparant la notion formelle d'entier à sa notion intuitive. Le résultat