

Dans ce contexte de la théorie dénommée IST, gardons à l'esprit que fini ne signifie pas intuitivement fini, absolument fini, fini au sens des ordinateurs ou même de l'intuition ordinaire des nombres entiers. Fini a le sens que lui donne la théorie des ensembles ZFC, c'est-à-dire le sens formel de ce qui peut être mis en bijection avec une partie propre de soi. Un ensemble fini en ce sens peut ne pas paraître fini à notre intuition. Ainsi, lorsque μ est un entier infiniment grand, le segment $[0, \mu]$ est infini à nos yeux, mais fini du point de vue des manipulations mathématiques. C'est toute la difficulté qu'avaient déjà explorée les pionniers de la théorie des modèles et que Robinson avait exploitée pour faire émerger des réels infiniment petits. On peut, si l'on désire se raccrocher à une signification intuitive absolue du fini, nommer «hyperfini» ce fini qui n'est fini que formellement, au sens de la théorie des ensembles. Les objets standard restent dans l'orbe de l'hyperfini.

Assignable et constructif

La manière dont la théorie IST relie l'intention justificatrice de l'analyse non standard à l'égard du discours des pionniers du calcul infinitésimal et la question générale du fini et de l'infini prépare et éclaire l'étape suivante. Celle-ci consiste à mettre directement en rapport l'analyse non standard et les idées «constructivistes». Le constructivisme accorde une importance décisive à la distinction entre ce qui peut être effectivement construit, ou devrait pourvoir l'être en principe, et ce qui se situe au-delà, ce qui est «idéel». En effet, nous commençons à le comprendre, ce qui permet d'avoir des nombres infiniment petits dans la mathématique du continu sans engager les calculs sur les nombres réels dans des paradoxes, c'est de disposer d'un statut d'entité non assignable pour certains objets, certains nombres.

Ce statut, Robinson l'obtient en faisant jouer ensemble deux modèles de la même théorie dont l'un est une extension élémentaire de l'autre, et E. Nelson l'obtient en installant dans le langage une notion d'entité assignable. Le résultat de cette démarche est de lier l'assignable au fini, le non-assignable à l'infini.

Pourquoi, dans ces conditions, ne pas tenter de se fonder sur ce qui semble être la figure contemporaine de la notion d'entité assignable, et

RÉCURRENCE INTERNE ET EXTERNE

Le principe de récurrence nous dit que si une propriété $P(n)$ est vraie pour $n = 0$ et si elle est héréditaire (la vérité de $P(n)$ entraîne celle de $P(n + 1)$, alors elle est vraie pour tout n . Ce principe reste valable dans l'analyse non standard «nelsonienne», mais seulement pour les propriétés dites *internes*, qui ne font pas intervenir la notion d'objet standard (le prédicat *st*). Pour une propriété externe jouant sur la nouvelle notion, sachant que $P(0)$ est vraie et que, pour le standard, $P(n)$ entraîne $P(n + 1)$, on pourra seulement conclure que $P(n)$ est vraie pour tout entier standard, la valeur de vérité de la propriété P pour les entiers infiniment grands restant parfaitement indéterminée.

poser qu'est assignable ce qui est représentable par l'informatique? Parce que cette notion est trop technique et contingente : elle semble dépendre d'un état actuel de la puissance des machines et de la taille des mémoires, par exemple. Les notions plus théoriques d'objets constructibles au sens de Brouwer (c'est-à-dire d'objets dont l'élaboration apparaît comme réalisable à l'intuition qui accompagne la succession indéfinie des nombres entiers) ou de calculabilité (dans les années 1930, des mathématiciens ont introduit cette notion en cherchant à préciser la notion intuitive de calcul) fournissent exactement ce qu'il est naturel de rechercher : des concepts d'entité assignable assez généraux pour dépasser les limites contingentes de la technique, mais qui n'entrent pourtant pas dans un type d'idéalité comparable à celui des ensembles infinis de nombres $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$. D'où l'idée de fonder un discours d'analyse non standard dont l'équation de base serait *standard = constructif*.

Il revient à Georges Reeb d'avoir eu l'idée générale et systématique d'une telle stratégie, et également d'avoir compris que c'était toujours de cela qu'il s'était agi dans l'analyse non standard historique.

Il s'agit de comprendre que tout ce qui est nécessaire au développement de l'analyse non standard est un entier infiniment grand. On doit s'être également muni, bien entendu, d'une règle du jeu instruisant sur la façon de raisonner et de calculer avec lui, sur le type d'entités que l'on peut construire à partir des nombres entiers divisés en finis et infinis dont on dispose ; enfin, on doit se munir d'un bon motif «phi-

losophico-fondationnel» pour ajouter crédit à tout ce montage intellectuel faisant intervenir un nombre entier infiniment grand. Dans ces conditions, on peut introduire un système de nombres comportant des infiniment petits et grands qui permet de faire de l'analyse. Le texte qui formule le programme d'une mathématique non standard fondée sur l'entier infiniment grand tout en interprétant ce dernier comme entier non constructif est l'article *La mathématique non standard, vieille de soixante ans?* de Georges Reeb, publié en 1979.

Pour Reeb, nous devons reconnaître que la boîte rassemblant l'ensemble des entiers du formaliste, le $\mathbb{N}$ obéissant au principe du tiers exclu, que l'on définit comme le plus petit ensemble infini en théorie des ensembles, n'a aucune raison de contenir seulement les entiers intuitifs, les entiers qui viennent à leur heure au fil de l'énumération 0, 1, 2, etc. C'est ce que les inlassables objections de Brouwer au formalisme naissant, au début de XX^e siècle, auraient montré sans ambiguïté. Brouwer a critiqué la mathématique ensembliste et formelle qui s'affirmait sous ses yeux, et a proposé une autre orientation, qu'il nomma «intuitionniste». Selon Reeb, Brouwer avait raison de considérer qu'une preuve formelle de la fausseté de la proposition «quel que soit l'entier n , la propriété $P(n)$ est vraie» – le plus probablement obtenue au moyen d'un raisonnement par l'absurde – n'apportait pas la garantie que l'on sache indiquer la construction d'un entier N tel que non $P(N)$ soit vraie. Toutefois, dans ces conditions, l'entier n tel que non $P(n)$ est vraie, dont la théorie affirme l'existence via la preuve formelle, semble avoir le statut d'un entier «au-delà» des entiers effectifs : un tel entier est réputé «exister» parce qu'une phrase de la théorie affirmant son existence est démontrée, mais on ne peut l'identifier avec aucun entier que nous sachions construire. Il est donc «plus grand» que tous ceux-ci.

Dans le raisonnement de Reeb, l'entier infiniment grand est introduit par un étrange raisonnement, qui accepte l'existence de la théorie formelle des entiers et envisage même la mythique collection de nombres satisfaisant cette théorie, mais qui, en même temps, débat sur ce que cette collection peut et doit contenir comme éléments, en comparant la notion formelle d'entier à sa notion intuitive. Le résultat

auquel on arrive (que le putatif $\mathbb{N}$ doit contenir un entier infiniment grand) a beau être nécessaire au gré du raisonnement tenu, il ne peut pas être assumé dans le formalisme : si le prédicat «infiniment grand» était disponible dans le formalisme, on obtiendrait un paradoxe en appliquant le schéma d'induction à la classe des entiers finis ou à la classe des entiers infiniment grands. Par exemple, on dirait en substance que l'ensemble des entiers infiniment grands a un plus petit élément α , donc $\alpha - 1$ est fini, mais alors $\alpha - 1$ est aussi, d'où contradiction.

Tous les montages de l'analyse non standard nouvelle, jouant sur un entier infiniment grand sans passer sous les fourches Caudines de $\mathbb{R}$ ou de la théorie des ensembles, consistent à transformer le formalisme de la théorie des entiers pour que disparaissent ces paradoxes. L'usage du principe de récurrence devra, par exemple, être limité à des prédicats non bâtis au moyen de la notion d'entier «fini», «standard» ou «limité». Il résulte alors de tels dispositifs que les entiers infiniment grands apparaissent comme une classe insituable, intervenant sur la droite entière «après» ceux qui sont finis. Ils se distinguent des entiers standard, que l'on interprète désormais comme les «entiers constructifs», disons les entiers que l'on peut construire avec des ordinateurs, en imaginant ceux-ci suffisamment puissants.

L'infiniment grand

L'intention de ces théories non standard est ainsi de saisir l'infiniment grand comme l'excédent insituable au-delà du constructif. Ces théories idéalisent l'intuition des rapports entre entiers constructifs et entiers énormes, inaccessibles, rapports qui sont «concrètement» assez imprévisibles. Comme l'explique Jacques Harthong, les entiers constructibles ou accessibles sont nécessairement définis relativement à un langage de programmation choisi comme logiciel de production ou d'écriture de référence. Ainsi le nombre $10^{\wedge} (10^{\wedge} (10^{\wedge} (10^{\wedge} (10^{\wedge} 10)))$, où $a^{\wedge} b$ désigne a^b , peut être calculé par un programme très simple, long d'une vingtaine de pas sur une calculatrice programmable : ce nombre est néanmoins gigantesque.



Des infinis aux visages différents

La notion d'infini a évolué avec les conceptions de l'analyse non standard. Abraham Robinson (à gauche) se fonde sur les ensembles infinis de la théorie des ensembles et sur l'axiome du choix pour produire un ensemble des hyper-réels dans lequel on trouve, en sus des nombres réels connus, des nombres

infiniment grands et infiniment petits.

En reformalisant la théorie des ensembles, Edward Nelson (à droite) introduit la notion d'entité standard : les infiniment petits ou grands existent non pas comme nouveaux objets «ajoutés», mais parce que nous reconnaissons que, parmi les réels, existent nécessairement des éléments insaisissables.

Si Nelson relie l'infini à l'insaisissable et le fini à l'assignable, il revient au mathématicien Georges Reeb (à gauche) de fonder l'analyse non standard sur une sensibilité constructiviste. Autrement dit, à la suite de Reeb, on essaie de rapprocher le concept d'infini du concept d'incalculable. Les entiers standard sont alors les entiers «constructifs», ceux qu'on peut calculer à l'aide d'ordinateurs ou qui apparaissent au fil de l'énumération naïve.



Un nombre de même taille, mais n'ayant pas la même structure simple n'aurait aucune chance d'être programmable dans le même langage (à défaut de la structure, il ne resterait que la ressource d'écrire ses chiffres, mais il faudrait un nombre de symboles supérieur à celui des particules de l'Univers, et un temps dépassant la capacité de survie de tout vivant). La distribution des nombres «accessibles à la calculatrice programmable» est non régulière, tributaire des particularités du matériel symbolique et des opérations de base de la calculatrice considérée. La distribution des nombres qui apparaissent comme constructibles au sens de telle calculatrice programmable est donc clairsemée.

Dans le nouveau point de vue, l'analyse non standard est une systématisation théorique, indépendante de toute machine et de tout langage particuliers, des phénomènes que nous citons en exemple au début de l'article, lorsque nous remarquons que, pour les calculatrices, certains entiers finis jouent le rôle de l'infini. Si l'on comprend bien le concept de nombre fini accessible, constructif, on remarque que la pensée arithmétique contemporaine rend plausible une théorisation qualitative des entiers énormes qui leur donne un statut d'infini. Toutefois, dès que l'on dispose d'un contexte théorique d'arithmétique avec des entiers infiniment grands, on peut introduire un calcul sur des rationnels à dénominateur infiniment grand qui permet de retrouver, dans une certaine mesure, la mathématique du continu à laquelle nous sommes habitués. Alors, nous pourrions

faire de l'analyse non standard en justifiant les infiniment petits et les équations imparfaites des pionniers.

Pour y parvenir, il faut, encore une fois, faire valoir certains objets comme non assignables ou relativement mal assignés, des entiers énormes cette fois. Selon les stratégies intellectuelles, la justification de ce caractère non assignable peut être plus ou moins subtile et utiliser soit la philosophie intuitionniste de Brouwer, soit le théorème d'incomplétude de Gödel, soit un examen précis des possibilités des langages de programmation.

Les conceptions successives de l'analyse non standard ont en commun d'avoir tenté de faire jouer en plus, à côté ou à la place de la notion cantorienne d'infini de totalité, une notion d'indéfini, d'entité non assignable. Cette notion rend jusqu'à un certain point des services techniques comparables à ceux que rendaient les notions infinitésimales des pionniers. En tout cas, elle justifie *a posteriori* un usage intuitif de l'infinitésimal auquel les mathématiciens et les physiciens sont restés attachés.

Jean-Michel SALANSKIS est professeur de philosophie des sciences à l'Université Paris X (Nanterre).

J.-M. SALANSKIS, *Le constructivisme non standard*, Presses du Septentrion, 1999.

M. PANZA et J.-M. SALANSKIS, *L'objectivité mathématique*, Dunod-Masson, 1995.

R. LALEMENT, *Logique, réduction, résolution*, Hermès, 1990.

F. DIENER et G. REEB, *Analyse non standard*, Hermann, 1989.