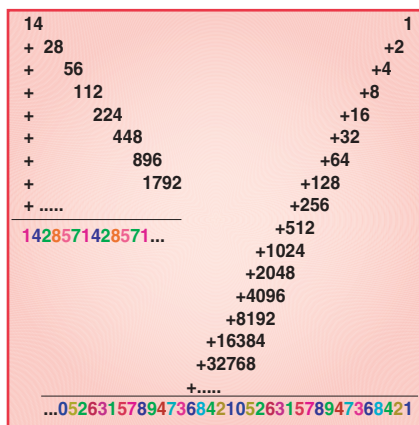


Les nombres infinis vers la gauche

JEAN-PAUL DELAHAYE

A côté des nombres habituels, il existe un autre univers de nombres, celui des nombres décadiques, infinis vers la gauche.



Au mois de septembre, dans la rubrique *Logique et calcul* consacrée à la numérologie, la figure 4 posait deux énigmes mathématiques portant sur d'étranges coïncidences. Nous remercions vivement tous les lecteurs qui nous ont écrit en les priant de nous excuser de ne pouvoir leur répondre individuellement. Certains nous ont suggéré des voies d'attaque, d'autres ont donné des solutions partielles, d'autres enfin ont proposé des solutions parfaites des deux énigmes et composé des variantes. Leurs commentaires vont nous permettre de compléter nos réflexions sur les coïncidences et d'aborder ce qui était sous-jacent au second problème : l'arithmétique des nombres infinis à gauche, les étranges nombres décadiques.

Rappelons les énoncés soumis à la sagacité des lecteurs et illustrés à côté du titre.

Coincidence 1

Partant de 14 et doublant à chaque fois, nous disposons une addition infinie en décalant de deux chiffres vers la droite chaque nouvelle ligne. Nous obtenons

142857142857142857... répété indéfiniment. Or cette suite est celle que nous obtenons quand nous divisons 1 par 7 : $1/7 = 0,142857142857...$ Pourquoi?

Coincidence 2.

Nous effectuons l'addition des puissances de 2 en décalant cette fois d'un chiffre vers la gauche à chaque ligne. La suite des chiffres du résultat se répète, et il s'agit des décimales de la fraction $1/19$, soit $0.052631578947368421052631578947368421...$ Pourquoi?

Résolution de l'énigme 1

Pour la première énigme, il suffit de remarquer que l'addition disposée à côté du titre de l'article correspond à la somme $S : S = 7 \times (2/100 + (2/100)^2 + (2/100)^3 + (2/100)^4 + \dots)$. La parenthèse est la somme des termes d'une suite géométrique. En utilisant la formule $1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + \dots = 1/(1-X)$, $S = 7 \times (2/100) / (1 - (2/100)) = (7 \times 2 \times 100) / (98 \times 1) = 14/98 = 1/7$, ce qui explique la «coïncidence»!

Remarquons que, pour résoudre cette première énigme, nous n'avons pas besoin de connaître les décimales calculées, ni même de savoir que le résultat final est

périodique. Nous n'avons même pas besoin de savoir faire une division ou une addition en base dix! Le miracle de tous ces nombres à l'écriture compliquée et sans régularité notable, s'additionnant pour former une suite périodique, n'en est pas un. Pour résoudre le problème, il suffisait de se dégager de sa complication numérique apparente et de s'aider d'un résultat abstrait (mais quand même très simple).

Variantes de l'énigme 1

Voici quelques variantes de la première énigme. D'abord une addition due à Jean-Paul Hermann, qui part de 97 et qui triple d'une ligne à la suivante en décalant de deux chiffres vers la droite :

97
+ 291
+ 873
+ 2619
+ 7857
+ 23571
+ 70713
+ 212139
+
9999999999999999

1. INTERPRÉTATION D'UNE FORMULE



La flèche tirée par l'archer parcourt 1 mètre dans la première seconde, 10 dans la demi-seconde qui suit, 100 mètres durant le quart de seconde suivant, etc. Après avoir tiré sa flèche, l'archer se retourne. Surprise : la flèche revient de l'infini et le transperce



après qu'il a parcouru $1/9$ de mètre en deux secondes! Ce paradoxe, proposé par Ilan Vardi, illustre l'interprétation d'une formule : la somme divergente $1+10+100+\dots$ est "égale" à $-1/9$ avec la formule de la somme d'une série géométrique.

L'explication tient sur deux lignes :
 $S = (97/100) \times (1 + 3/100 + (3/100)^2 + (3/100)^3 + \dots)$
 $= (97/100) / (1 - 3/100) = (97 \times 100) / (97 \times 100) = 1.$

N'oublions pas que $0,99999\dots = 1$, car l'écart entre $0,99999\dots$ et 1 est plus petit que $0,1$, mais aussi plus petit que $0,01$ et plus petit aussi que $0,001$, etc. L'écart est plus petit que tout nombre positif, il est donc nul. D'où l'égalité.

Voici une addition infinie due à Frédéric De Ligt. On part de 1 et on multiplie par 3 en décalant d'un chiffre vers la droite :

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 3 \\ + 9 \\ + 27 \\ + 81 \\ + 243 \\ + 729 \\ + 2187 \\ + \dots \end{array}$$

142857142857...

À nouveau, ce sont les chiffres de $1/7$, ce que je vous laisse démontrer.

L'addition suivante, de Jean Blanchard, prouve que l'informatique qui fait un usage incessant des nombres 64 , 256 , 1024 et autres puissances paires de 2 est bien une œuvre du diable... à moins que cela ne prouve qu'en cherchant bien on peut faire apparaître 666 partout où on le veut.

On part de 64 et l'on multiplie par 4 en décalant de deux chiffres vers la droite :

$$\begin{array}{r} 64 \\ + 256 \\ + 1024 \\ + 4096 \\ + 16384 \\ + 65536 \\ + \dots \end{array}$$

6666666666666666...

Tomber sur une suite périodique de décimales dans de grandes additions de cette sorte n'a rien d'étonnant. La réalité est même que, ne pas tomber sur une suite périodique de chiffres est impossible.

En effet, si vous écrivez un nombre entier quelconque sur la première ligne du tableau et qu'ensuite, pour obtenir les autres lignes, vous le multipliez par un nombre entier choisi une fois pour toutes en effectuant un décalage vers la droite d'un nombre constant de cases, alors vous obtiendriez la somme d'une série géométrique, somme qui sera un nombre rationnel (de la forme p/q avec deux entiers) et donc possèdera un développement décimal périodique.

Résolution de l'énigme 2

La seconde énigme est plus difficile, car l'addition est infinie à gauche, chose qui apparemment n'a pas de sens. Parmi les solutions des lecteurs, certaines étaient incomplètes ou fausses, et les solutions complètes étaient souvent assez longues (deux pages ou plus). La solution de Jean-Paul Hermann est à la fois élémentaire

2. LES NOMBRES DÉCADIQUES ET LES OPÉRATIONS SUR CES NOMBRES

Les nombres décadiques sont les nombres qu'on obtient en s'autorisant à placer une infinité de chiffres avant la virgule et un nombre fini de chiffres après la virgule (pour les nombres réels la règle est inverse : un nombre fini de chiffres avant la virgule, et un nombre infini de chiffres après la virgule). Exemples : $\dots 11111111,111$ $\dots 13131313,99332$

L'addition des nombres décadiques n'a pas de mystère :

$$\begin{array}{r} \dots 242424242 \\ + \dots 111111111 \\ \hline \dots 353535353 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \dots 888888,888 \\ + \dots 111111,112 \\ \hline \dots 000000,000 \end{array}$$

Toutefois, la seconde addition montre que l'opposé du nombre $\dots 888888,888$ est le nombre $\dots 111111,112$, autrement dit que : $-\dots 888888,888$

$= \dots 111111,112$. Vous pouvez vérifier de même que :

$-\dots 999999999 = 1$ et que $-123 = \dots 999999877$

Plus généralement : $-\dots edcba = \dots (9-e)(9-d)(9-c)(9-b)(10-a)$

Le résultat d'additions infinies de nombres décadiques peut surprendre :

$$\begin{array}{r} 9 \\ + 90 \\ + 900 \\ + 9000 \\ + 90000 \\ + \dots \end{array}$$

$= \dots 999999999999$

Or $\dots 999999999999 + 1 = 0$. Nous avons l'étrange résultat :

$9 + 90 + 900 + 9000 + 90000 + \dots = -1.$

Puisque bien sûr : $\dots 999999999999 = 9 \times (\dots 111111111111)$, on a donc :

$\dots 111111111111 = -1/9$

Pour qu'une addition infinie soit possible il faut et il suffit que le nombre de 0 terminant les nombres qu'on additionne augmente toujours. Cela permet de définir la multiplication des nombres décadiques.

La multiplication décadique

Pour faire une multiplication on opère de la même façon qu'habituellement sans jamais s'arrêter, comme indiqué en **a** :

$$\begin{array}{r} \text{a} \quad \dots 242424242 \\ \times \dots 111111111 \\ \hline \dots 24242424242 \\ \dots 24242424242 \\ \dots 24242424242 \\ \dots 24242424242 \\ \dots 24242424242 \\ \dots 24242424242 \\ \hline \dots 528615286152862 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{b} \quad \dots 24242424242 \\ \times \dots 1313131313 \\ \hline \dots 27272726 \\ \dots 42424242 \\ \dots 27272726 \\ \dots 42424242 \\ \dots 27272726 \\ \hline \dots 77777489746 \end{array}$$

On montre que si on multiplie deux nombres décadiques périodiques entre eux, alors on obtient un nombre décadique périodique. En fait les nombres décadiques périodiques sont les fractions (voir la figure 5).

On vérifie, en effectuant les multiplications : $\dots 242424242 \times 33 = \dots 111111111 \times 9$ et $\dots 528615286152862 \times 297$, que : $\dots 24242424242 = -42/99 = -14/33$; $\dots 1111111111 = -1/9$; $\dots 528615286152862 = 42/891 = -14/297$

La période d'un produit peut être longue : celle du produit indiqué en **b** est de longueur 66 , et le résultat de la multiplication est égal à $\dots sssss6$ où $s = 594429139883685338230792776247321701867156412610958065503520048974$

La division décadique

$$\begin{array}{r} \dots 33333333333333 \\ - \dots 63636363636363 \\ \hline \dots 69696969696970 \\ - \dots 6969696969697 \\ \hline \dots 84848484848487 \\ - \dots 84848484848485 \\ \hline \dots 84848484848485 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \dots 121212121212121 \\ - \dots 428571428571428573 \\ \hline \dots 121212121212121 \end{array}$$

On vérifie bien sûr que : $\dots 121212121212121 \times \dots 428571428571428573 = \dots 33333333333333$

On considère le dernier chiffre, 3 . On soustrait donc $3 \times \dots 212121212121 = \dots 63636363636363$ à $\dots 33333333333333$, pour faire apparaître un zéro en dernière position. On trouve $\dots 696969696970$. On efface le zéro : $\dots 69696969697$. Comme le dernier chiffre est 7 , on soustrait donc le produit $7 \times \dots 212121212121 = \dots 4848484847$. On trouve $\dots 84848484850$. On efface le zéro ce qui donne $\dots 8484848485$; le dernier chiffre est 5 . On soustrait alors le produit $5 \times \dots 212121212121 = \dots 60606060605$. Etc..