

L'explication tient sur deux lignes :  
 $S = (97/100) \times (1 + 3/100 + (3/100)^2 + (3/100)^3 + \dots)$   
 $= (97/100) / (1 - 3/100) = (97 \times 100) / (97 \times 100) = 1.$

N'oublions pas que  $0,99999\dots = 1$ , car l'écart entre  $0,99999\dots$  et  $1$  est plus petit que  $0,1$ , mais aussi plus petit que  $0,01$  et plus petit aussi que  $0,001$ , etc. L'écart est plus petit que tout nombre positif, il est donc nul. D'où l'égalité.

Voici une addition infinie due à Frédéric De Ligt. On part de  $1$  et on multiplie par  $3$  en décalant d'un chiffre vers la droite :

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 3 \\ + 9 \\ + 27 \\ + 81 \\ + 243 \\ + 729 \\ + 2187 \\ + \dots \\ \hline 142857142857\dots \end{array}$$

À nouveau, ce sont les chiffres de  $1/7$ , ce que je vous laisse démontrer.

L'addition suivante, de Jean Blanchard, prouve que l'informatique qui fait un usage incessant des nombres  $64$ ,  $256$ ,  $1024$  et autres puissances paires de  $2$  est bien une œuvre du diable... à moins que cela ne prouve qu'en cherchant bien on peut faire apparaître  $666$  partout où on le veut.

On part de  $64$  et l'on multiplie par  $4$  en décalant de deux chiffres vers la droite :

$$\begin{array}{r} 64 \\ + 256 \\ + 1024 \\ + 4096 \\ + 16384 \\ + 65536 \\ + \dots \\ \hline 66666666666666\dots \end{array}$$

Tomber sur une suite périodique de décimales dans de grandes additions de cette sorte n'a rien d'étonnant. La réalité est même que, ne pas tomber sur une suite périodique de chiffres est impossible.

En effet, si vous écrivez un nombre entier quelconque sur la première ligne du tableau et qu'ensuite, pour obtenir les autres lignes, vous le multipliez par un nombre entier choisi une fois pour toutes en effectuant un décalage vers la droite d'un nombre constant de cases, alors vous obtiendriez la somme d'une série géométrique, somme qui sera un nombre rationnel (de la forme  $p/q$  avec deux entiers) et donc possèdera un développement décimal périodique.

### Résolution de l'énigme 2

La seconde énigme est plus difficile, car l'addition est infinie à gauche, chose qui apparemment n'a pas de sens. Parmi les solutions des lecteurs, certaines étaient incomplètes ou fausses, et les solutions complètes étaient souvent assez longues (deux pages ou plus). La solution de Jean-Paul Hermann est à la fois élémentaire

## 2. LES NOMBRES DÉCADIQUES ET LES OPÉRATIONS SUR CES NOMBRES

Les nombres décadiques sont les nombres qu'on obtient en s'autorisant à placer une infinité de chiffres avant la virgule et un nombre fini de chiffres après la virgule (pour les nombres réels la règle est inverse : un nombre fini de chiffres avant la virgule, et un nombre infini de chiffres après la virgule). Exemples :  $\dots 11111111,111$   $\dots 13131313,99332$

L'addition des nombres décadiques n'a pas de mystère :

$$\begin{array}{r} \dots 242424242 \\ + \dots 111111111 \\ \hline \dots 353535353 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \dots 888888,888 \\ + \dots 111111,112 \\ \hline \dots 000000,000 \end{array}$$

Toutefois, la seconde addition montre que l'opposé du nombre  $\dots 888888,888$  est le nombre  $\dots 111111,112$ , autrement dit que :  $-\dots 888888,888$

$= \dots 111111,112$ . Vous pouvez vérifier de même que :

$-\dots 999999999 = 1$  et que  $-123 = \dots 999999877$

Plus généralement :  $-\dots edcba = \dots (9-e)(9-d)(9-c)(9-b)(10-a)$

Le résultat d'additions infinies de nombres décadiques peut surprendre :

$$\begin{array}{r} \phantom{\dots} 9 \\ + \phantom{\dots} 90 \\ + \phantom{\dots} 900 \\ + \phantom{\dots} 9000 \\ + \phantom{\dots} 90000 \\ + \dots \\ \hline = \dots 99999999999 \end{array}$$

Or  $\dots 99999999999 + 1 = 0$ . Nous avons l'étrange résultat :

$$9 + 90 + 900 + 9000 + 90000 + \dots = -1.$$

Puisque bien sûr :  $\dots 99999999999 = 9 \times (\dots 11111111111)$ , on a donc :

$$\dots 11111111111 = -1/9$$

Pour qu'une addition infinie soit possible il faut et il suffit que le nombre de  $0$  terminant les nombres qu'on additionne augmente toujours. Cela permet de définir la multiplication des nombres décadiques.

### La multiplication décadique

Pour faire une multiplication on opère de la même façon qu'habituellement sans jamais s'arrêter, comme indiqué en **a** :

|                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{array}{r} \text{a} \quad \dots 242424242 \\ \times \dots 111111111 \\ \hline \dots 24242424242 \\ \dots 24242424242 \\ \dots 24242424242 \\ \dots 24242424242 \\ \dots 24242424242 \\ \dots 24242424242 \\ \dots 24242424242 \\ \hline \dots 528615286152862 \end{array}$ | $\begin{array}{r} \text{b} \quad \dots 24242424242 \\ \times \dots 13131313 \\ \hline \dots 27272726 \\ \dots 42424242 \\ \dots 27272726 \\ \dots 42424242 \\ \dots 27272726 \\ \dots 42424242 \\ \dots 27272726 \\ \hline \dots 77777489746 \end{array}$ |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

On montre que si on multiplie deux nombres décadiques périodiques entre eux, alors on obtient un nombre décadique périodique. En fait les nombres décadiques périodiques sont les fractions (voir la figure 5).

On vérifie, en effectuant les multiplications :  $\dots 242424242 \times 33 = \dots 111111111 \times 9$  et  $\dots 528615286152862 \times 297$ , que :  $\dots 24242424242 = -42/99 = -14/33$  ;  $\dots 11111111111 = -1/9$  ;  $\dots 528615286152862 = 42/891 = -14/297$

La période d'un produit peut être longue : celle du produit indiqué en **b** est de longueur  $66$ , et le résultat de la multiplication est égal à  $\dots sssss6$  où  $s = 594429139883685338230792776247321701867156412610958065503520048974$

### La division décadique

$$\begin{array}{r} \dots 33333333333333 \\ - \dots 63636363636363 \\ \hline = \dots 69696969696970 \\ \dots 6969696969697 \\ - \dots 84848484848487 \\ \hline = \dots 848484848484850 \\ \dots 84848484848485 \\ \hline \dots \end{array} \qquad \begin{array}{r} \dots 121212121212121 \\ - \dots 428571428571428573 \\ \hline \dots \end{array}$$

On vérifie bien sûr que :  $\dots 121212121212121 \times \dots 428571428571428573 = \dots 33333333333333$

On considère le dernier chiffre,  $3$ . On soustrait donc  $3 \times \dots 212121212121 = \dots 63636363636363$  à  $\dots 333333333333$ , pour faire apparaître un zéro en dernière position. On trouve  $\dots 696969696970$ . On efface le zéro :  $\dots 69696969697$ . Comme le dernier chiffre est  $7$ , on soustrait donc le produit  $7 \times \dots 212121212121 = \dots 4848484847$ . On trouve  $\dots 84848484850$ . On efface le zéro ce qui donne  $\dots 8484848485$  ; le dernier chiffre est  $5$ . On soustrait alors le produit  $5 \times \dots 212121212121 = \dots 60606060605$ . Etc..