

L'explication tient sur deux lignes :
 $S = (97/100) \times (1 + 3/100 + (3/100)^2 + (3/100)^3 + \dots)$
 $= (97/100) / (1 - 3/100) = (97 \times 100) / (97 \times 100) = 1.$

N'oublions pas que $0,99999\dots = 1$, car l'écart entre $0,99999\dots$ et 1 est plus petit que $0,1$, mais aussi plus petit que $0,01$ et plus petit aussi que $0,001$, etc. L'écart est plus petit que tout nombre positif, il est donc nul. D'où l'égalité.

Voici une addition infinie due à Frédéric De Ligt. On part de 1 et on multiplie par 3 en décalant d'un chiffre vers la droite :

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 3 \\ + 9 \\ + 27 \\ + 81 \\ + 243 \\ + 729 \\ + 2187 \\ + \dots \end{array}$$

142857142857...

À nouveau, ce sont les chiffres de $1/7$, ce que je vous laisse démontrer.

L'addition suivante, de Jean Blanchard, prouve que l'informatique qui fait un usage incessant des nombres 64 , 256 , 1024 et autres puissances paires de 2 est bien une œuvre du diable... à moins que cela ne prouve qu'en cherchant bien on peut faire apparaître 666 partout où on le veut.

On part de 64 et l'on multiplie par 4 en décalant de deux chiffres vers la droite :

$$\begin{array}{r} 64 \\ + 256 \\ + 1024 \\ + 4096 \\ + 16384 \\ + 262144 \\ + \dots \end{array}$$

6666666666666666...

Tomber sur une suite périodique de décimales dans de grandes additions de cette sorte n'a rien d'étonnant. La réalité est même que, ne pas tomber sur une suite périodique de chiffres est impossible.

En effet, si vous écrivez un nombre entier quelconque sur la première ligne du tableau et qu'ensuite, pour obtenir les autres lignes, vous le multipliez par un nombre entier choisi une fois pour toutes en effectuant un décalage vers la droite d'un nombre constant de cases, alors vous obtiendriez la somme d'une série géométrique, somme qui sera un nombre rationnel (de la forme p/q avec deux entiers) et donc possèdera un développement décimal périodique.

Résolution de l'énigme 2

La seconde énigme est plus difficile, car l'addition est infinie à gauche, chose qui apparemment n'a pas de sens. Parmi les solutions des lecteurs, certaines étaient incomplètes ou fausses, et les solutions complètes étaient souvent assez longues (deux pages ou plus). La solution de Jean-Paul Hermann est à la fois élémentaire

2. LES NOMBRES DÉCADIQUES ET LES OPÉRATIONS SUR CES NOMBRES

Les nombres décadiques sont les nombres qu'on obtient en s'autorisant à placer une infinité de chiffres avant la virgule et un nombre fini de chiffres après la virgule (pour les nombres réels la règle est inverse : un nombre fini de chiffres avant la virgule, et un nombre infini de chiffres après la virgule). Exemples : $\dots 11111111,111$ $\dots 13131313,99332$

L'addition des nombres décadiques n'a pas de mystère :

$$\begin{array}{r} \dots 242424242 \\ + \dots 111111111 \\ \hline \dots 353535353 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \dots 888888,888 \\ + \dots 111111,112 \\ \hline \dots 000000,000 \end{array}$$

Toutefois, la seconde addition montre que l'opposé du nombre $\dots 888888,888$ est le nombre $\dots 111111,112$, autrement dit que : $-\dots 888888,888$

$= \dots 111111,112$. Vous pouvez vérifier de même que :

$-\dots 999999999 = 1$ et que $-123 = \dots 999999877$

Plus généralement : $-\dots edcba = \dots (9-e)(9-d)(9-c)(9-b)(10-a)$

Le résultat d'additions infinies de nombres décadiques peut surprendre :

$$\begin{array}{r} 9 \\ + 90 \\ + 900 \\ + 9000 \\ + 90000 \\ + \dots \end{array}$$

$= \dots 999999999999$

Or $\dots 999999999999 + 1 = 0$. Nous avons l'étrange résultat :

$$9 + 90 + 900 + 9000 + 90000 + \dots = -1.$$

Puisque bien sûr : $\dots 999999999999 = 9 \times (\dots 111111111111)$, on a donc :

$$\dots 111111111111 = -1/9$$

Pour qu'une addition infinie soit possible il faut et il suffit que le nombre de 0 terminant les nombres qu'on additionne augmente toujours. Cela permet de définir la multiplication des nombres décadiques.

La multiplication décadique

Pour faire une multiplication on opère de la même façon qu'habituellement sans jamais s'arrêter, comme indiqué en **a** :

$$\begin{array}{r} \dots 242424242 \\ \times \dots 111111111 \\ \hline \dots 24242424242 \\ \dots 24242424242 \\ \dots 24242424242 \\ \dots 24242424242 \\ \dots 24242424242 \\ \dots 24242424242 \\ \hline \dots 528615286152862 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \dots 24242424242 \\ \times \dots 13131313 \\ \hline \dots 27272726 \\ \dots 42424242 \\ \dots 27272726 \\ \dots 42424242 \\ \dots 27272726 \\ \hline \dots 77777489746 \end{array}$$

On montre que si on multiplie deux nombres décadiques périodiques entre eux, alors on obtient un nombre décadique périodique. En fait les nombres décadiques périodiques sont les fractions (voir la figure 5).

On vérifie, en effectuant les multiplications : $\dots 242424242 \times 33$; $\dots 111111111 \times 9$ et $\dots 528615286152862 \times 297$, que : $\dots 24242424242 = -42/99 = -14/33$; $\dots 111111111 = -1/9$; $\dots 528615286152862 = 42/891 = -14/297$

La période d'un produit peut être longue : celle du produit indiqué en **b** est de longueur 66 , et le résultat de la multiplication est égal à $\dots sssss6$ où $s = 594429139883685338230792776247321701867156412610958065503520048974$

La division décadique

$$\begin{array}{r} \dots 333333333333333 \\ - \dots 636363636363636 \\ \hline = \dots 6969696969696970 \\ \dots 696969696969697 \\ - \dots 848484848484847 \\ \hline = \dots 848484848484850 \\ \dots 84848484848485 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \dots 121212121212121 \\ - \dots 428571428571428573 \\ \hline \end{array}$$

On vérifie bien sûr que : $\dots 121212121212121 \times \dots 428571428571428573 = \dots 333333333333333$

On considère le dernier chiffre, 3 . On soustrait donc $3 \times \dots 212121212121 = \dots 636363636363636$ à $\dots 333333333333333$, pour faire apparaître un zéro en dernière position. On trouve $\dots 696969696970$. On efface le zéro : $\dots 69696969697$. Comme le dernier chiffre est 7 , on soustrait donc le produit $7 \times \dots 212121212121 = \dots 4848484847$. On trouve $\dots 84848484850$. On efface le zéro ce qui donne $\dots 8484848485$; le dernier chiffre est 5 . On soustrait alors le produit $5 \times \dots 212121212121 = \dots 60606060605$. Etc..

3. LA SÉRIE GÉOMÉTRIQUE REVISITÉE

La démonstration de l'identité $1+X+X^2+\dots+X^n = (1-X^{n+1})/(1-X)$ est facile. Il suffit d'établir que : $(1+X+X^2+\dots+X^n)(1-X) = (1-X^{n+1})$, ce qui est évident, car : $(1+X+X^2+\dots+X^n)(1-X) = (1+X+X^2+\dots+X^n) \times 1 - (1+X+X^2+\dots+X^n) \times X$
 $= (1+X+X^2+\dots+X^n) - (X+X^2+\dots+X^{n+1}) = 1 - X^{n+1}$.

Il en résulte que, si X^{n+1} converge vers zéro, alors :

$$1+X+X^2+\dots+X^n+\dots = 1/(1-X)$$

Distinguons deux cas :

Nombres réels. Avec les nombres infinis à droite (dénommés nombres réels : ce sont ceux que tout le monde connaît et utilise), X^{n+1} converge vers 0 si, et seulement si, la valeur absolue de X est inférieure à 1. La formule de la série géométrique donne en particulier que : $1 + 1/2 + 1/4 + \dots = 2$. Elle donne aussi : $0,999999\dots = 0,9 + 0,09 + 0,009 + \dots = 9/10 \quad (1 + 1/10 + 1/10^2 + \dots + 1/10^n + \dots) = 9/10 \quad 1/(1-1/10) = 1$.

Nombres décadiques. Une suite x_n de nombres décadiques converge vers 0 si et seulement si le nombre des zéros à la fin de x_n devient de plus en plus grand quand n tend vers l'infini, comme c'est le cas avec la suite : 1, 20, 400, 8000, 160000, ..., 20^n . N'importe quelle suite du type $(k \times 10)^n$ tend donc vers 0 à l'infini. Il en résulte que, si X se termine par au moins un zéro (exemple : $X=20$), alors la série géométrique $1+X+X^2+\dots$ est une série décadique convergente et a pour somme : $1/(1-X)$.

Dans le cas où $X=20$, on a $1+20+20^2+\dots = 1/(1-20) = -1/19$.

On retrouve aussi que : $\dots 99999 = 9 \times \dots 11111 = 9(1+10+100+1000+\dots) = 9 \quad 1/(1-10) = 9 \quad (-1/9) = -1$.

et élégante. Son raisonnement utilise la formule de la somme des termes d'une série géométrique finie (voir la figure 3) : $1+X+X^2+X^3+\dots+X^{n-1} = (X^n-1)/(X-1)$.

Considérons les n premières lignes du tableau mystérieux. En complétant par des zéros à droite, leur somme est :

$$S(n) = 1 + 20 + 20^2 + 20^3 + \dots + 20^{n-1} = (20^n - 1)/(20 - 1) = 10^n \times 2^n / 19 - 1/19.$$

Remarquons maintenant que, lorsque n est multiple de 18, alors le nombre 2^n est de la forme $19k+1$ pour un certain entier k . Ce point délicat s'établit en notant que $2^{18} = 262144 = 13797 \times 19 + 1$, et en remarquant qu'en multipliant deux nombres de la forme $19k+1$ l'un par l'autre, on obtient encore un nombre de la même forme. Donc, lorsque n est multiple de 18, il existe un entier k tel que :

$$S(n) = 10^n \times (19k + 1)/19 - 1/19 = 10^n \times k + 10^n/19 - 1/19.$$

Dans cette somme, le terme $10^n \times k$ n'a pas d'importance pour les n derniers chiffres (c'est la généralisation d'une évidence : additionner 2300000 à un entier n'en modifie pas les cinq derniers chiffres).

Donc lorsque n est un multiple de 18, l'addition des n premières lignes donne, dans les n dernières colonnes, des chiffres qui sont ceux du nombre $10^n/19 - 1/19$, chiffres qui sont ceux qu'on obtient quand on fait la division de 1 par 19 (car on obtient les mêmes chiffres quand on divise 1 par 19 ou 10 par 19 ou 100 par 19, etc.). Le $-1/19$ fait disparaître les chiffres situés après la virgule de $10^n/19$.

Les n derniers chiffres du tableau sont donc ceux que donnent les N premiers chiffres de la division de 1 par 19. En prenant des n de plus en plus grands ($n=18, n=36, n=54$, etc.), on a l'explication complète de la coïncidence. (Une

autre solution plus simple encore, mais utilisant les nombres décadiques, est proposée plus loin).

Autres coïncidences du second type

Frédéric de Ligt et Raymond Millon proposent cette jolie variante. On part de 7 et on multiplie par 5 en décalant d'un chiffre vers la gauche :

$$\begin{array}{r} 7 \\ + 35 \\ + 175 \\ + 875 \\ + 4375 \\ + 21875 \\ + 109375 \\ + \dots \end{array}$$

...142857142857142857, chiffres de 1/7.

Frédéric de Ligt a aussi découvert une addition pour 1/13. On part de 3 et on multiplie par 4 en décalant d'un chiffre vers la gauche :

$$\begin{array}{r} 3 \\ + 12 \\ + 48 \\ + 192 \\ + 768 \\ + 3072 \\ + 12288 \\ + \dots \end{array}$$

...076923076923076923, chiffres de 1/13.

La justification de ces coïncidences du second type peut se faire à chaque fois sur le modèle de l'explication donnée plus haut. Cependant, cela semble un peu compliqué. La pratique de ces additions infinies sur la gauche suggère que nous pourrions bien généraliser les nombres habituels et en considérer qui seraient infinis vers la gauche. Mais est-ce que tout cela est possible et possède un sens ? Ne va-t-on pas obtenir des résultats absurdes, voire des contradictions ?

C'ÉTAIT IL Y A CENT ANS

Eh bien non, on ne tombera sur aucune contradiction en manipulant des nombres infinis vers la gauche, car il existe une théorie mathématique qui leur donne un sens et les étudie. Si une contradiction était découverte dans cette théorie, elle se traduirait par une contradiction en théorie des ensembles, et cela est jugé improbable.

Cette théorie, qui, précisons-le, n'a rien à voir avec la théorie des nombres infinis de Cantor (ordinaux et cardinaux) est vieille d'un peu plus d'un siècle. Elle est née dans la tête du mathématicien allemand Kurt Hensel à la fin du XIX^e siècle et est devenue un outil important en arithmétique, où elle sert en particulier à résoudre certaines équations diophantiennes (ce sont des équations à coefficients entiers). Cette théorie est peu enseignée, alors qu'elle ouvre sur un monde de nombres aux propriétés étranges qu'on pourrait utiliser dans les classes des collèges et des lycées pour prouver aux élèves que les mathématiques sont un univers féérique.

Contrairement aux nombres habituels qui peuvent se convertir d'une base de numération à l'autre sans perdre leur identité, les nombres infinis à gauche ne supportent pas le changement de base. Si vous choisissez de travailler en base de numération décimale (ce que nous allons faire), il faut toujours y rester, et les résultats changent si vous changez de base. Dit autrement, il y a autant de catégories de nombres infinis à gauche qu'il y a de bases possibles.

Les nombres infinis à gauche en base 10 sont les nombres décadiques. On les a parfois dénommés *brenoms*, qui signifie nombre en verlan, car ils s'étendent vers la gauche sans limite, comme les nombres habituels (les nombres dits réels) s'étendent vers la droite sans limite. Lorsqu'on se place en base n plutôt que 10, on parle de nombres n -adiques (la base s est bien sûr particulièrement douloureuse).

On peut leur mettre une virgule suivie d'un nombre fini de chiffres, ce qui est exactement la règle symétrique qu'on a avec les nombres réels : une infinité de chiffres après la virgule, mais seulement un nombre fini de chiffres avant la virgule. Un nombre décadique est donc par exemple :

$$\dots 179179179,345$$

les trois petits points signifiant qu'on répète infiniment la séquence 179 vers la gauche. Les nombres décadiques qui n'ont rien après la virgule sont les entiers décadiques.

Additionner les nombres décadiques ne pose pas de difficulté (voir la figure 1) :