

3. LA SÉRIE GÉOMÉTRIQUE REVISITÉE

La démonstration de l'identité $1+X+X^2+\dots+X^n = (1-X^{n+1})/(1-X)$ est facile. Il suffit d'établir que : $(1+X+X^2+\dots+X^n)(1-X) = (1-X^{n+1})$, ce qui est évident, car : $(1+X+X^2+\dots+X^n)(1-X) = (1+X+X^2+\dots+X^n) \times 1 - (1+X+X^2+\dots+X^n) \times X$
 $= (1+X+X^2+\dots+X^n) - (X+X^2+\dots+X^{n+1}) = 1 - X^{n+1}$.

Il en résulte que, si X^{n+1} converge vers zéro, alors :

$$1+X+X^2+\dots+X^n+\dots = 1/(1-X)$$

Distinguons deux cas :

Nombres réels. Avec les nombres infinis à droite (dénommés nombres réels : ce sont ceux que tout le monde connaît et utilise), X^{n+1} converge vers 0 si, et seulement si, la valeur absolue de X est inférieure à 1. La formule de la série géométrique donne en particulier que : $1 + 1/2 + 1/4 + \dots = 2$. Elle donne aussi : $0,999999\dots = 0,9 + 0,09 + 0,009 + \dots = 9/10 \quad (1 + 1/10 + 1/10^2 + \dots + 1/10^n + \dots) = 9/10 \quad 1/(1-1/10) = 1$.

Nombres décadiques. Une suite x_n de nombres décadiques converge vers 0 si et seulement si le nombre des zéros à la fin de x_n devient de plus en plus grand quand n tend vers l'infini, comme c'est le cas avec la suite : 1, 20, 400, 8000, 160000, ..., 20^n . N'importe quelle suite du type $(k \times 10)^n$ tend donc vers 0 à l'infini. Il en résulte que, si X se termine par au moins un zéro (exemple : $X=20$), alors la série géométrique $1+X+X^2+\dots$ est une série décadique convergente et a pour somme : $1/(1-X)$.

Dans le cas où $X=20$, on a $1+20+20^2+\dots = 1/(1-20) = -1/19$.

On retrouve aussi que : $\dots 99999 = 9 \times \dots 11111 = 9(1+10+100+1000+\dots) = 9 \quad 1/(1-10) = 9 \quad (-1/9) = -1$.

et élégante. Son raisonnement utilise la formule de la somme des termes d'une série géométrique finie (voir la figure 3) :

$1+X+X^2+X^3+\dots+X^{n-1} = (X^n-1)/(X-1)$.
 Considérons les n premières lignes du tableau mystérieux. En complétant par des zéros à droite, leur somme est :
 $S(n) = 1 + 20 + 20^2 + 20^3 + \dots + 20^{n-1} = (20^n - 1)/(20 - 1) = 10^n \times 2^n / 19 - 1/19$.

Remarquons maintenant que, lorsque n est multiple de 18, alors le nombre 2^n est de la forme $19k+1$ pour un certain entier k . Ce point délicat s'établit en notant que $2^{18} = 262144 = 13797 \times 19 + 1$, et en remarquant qu'en multipliant deux nombres de la forme $19k+1$ l'un par l'autre, on obtient encore un nombre de la même forme. Donc, lorsque n est multiple de 18, il existe un entier k tel que :

$$S(n) = 10^n \times (19k + 1)/19 - 1/19 = 10^n \times k + 10^n/19 - 1/19$$

Dans cette somme, le terme $10^n \times k$ n'a pas d'importance pour les n derniers chiffres (c'est la généralisation d'une évidence : additionner 2300000 à un entier n'en modifie pas les cinq derniers chiffres).

Donc lorsque n est un multiple de 18, l'addition des n premières lignes donne, dans les n dernières colonnes, des chiffres qui sont ceux du nombre $10^n/19 - 1/19$, chiffres qui sont ceux qu'on obtient quand on fait la division de 1 par 19 (car on obtient les mêmes chiffres quand on divise 1 par 19 ou 10 par 19 ou 100 par 19, etc.). Le $-1/19$ fait disparaître les chiffres situés après la virgule de $10^n/19$.

Les n derniers chiffres du tableau sont donc ceux que donnent les N premiers chiffres de la division de 1 par 19. En prenant des n de plus en plus grands ($n=18, n=36, n=54$, etc.), on a l'explication complète de la coïncidence. (Une

autre solution plus simple encore, mais utilisant les nombres décadiques, est proposée plus loin).

Autres coïncidences du second type
 Frédéric de Ligt et Raymond Millon proposent cette jolie variante. On part de 7 et on multiplie par 5 en décalant d'un chiffre vers la gauche :

$$\begin{array}{r} 7 \\ + 35 \\ + 175 \\ + 875 \\ + 4375 \\ + 21875 \\ + 109375 \\ + \dots \end{array}$$

...142857142857142857, chiffres de 1/7.

Frédéric de Ligt a aussi découvert une addition pour 1/13. On part de 3 et on multiplie par 4 en décalant d'un chiffre vers la gauche :

$$\begin{array}{r} 3 \\ + 12 \\ + 48 \\ + 192 \\ + 768 \\ + 3072 \\ + 12288 \\ + \dots \end{array}$$

...076923076923076923, chiffres de 1/13.

La justification de ces coïncidences du second type peut se faire à chaque fois sur le modèle de l'explication donnée plus haut. Cependant, cela semble un peu compliqué. La pratique de ces additions infinies sur la gauche suggère que nous pourrions bien généraliser les nombres habituels et en considérer qui seraient infinis vers la gauche. Mais est-ce que tout cela est possible et possède un sens ? Ne va-t-on pas obtenir des résultats absurdes, voire des contradictions ?

C'ÉTAIT IL Y A CENT ANS

Eh bien non, on ne tombera sur aucune contradiction en manipulant des nombres infinis vers la gauche, car il existe une théorie mathématique qui leur donne un sens et les étudie. Si une contradiction était découverte dans cette théorie, elle se traduirait par une contradiction en théorie des ensembles, et cela est jugé improbable.

Cette théorie, qui, précisons-le, n'a rien à voir avec la théorie des nombres infinis de Cantor (ordinaux et cardinaux) est vieille d'un peu plus d'un siècle. Elle est née dans la tête du mathématicien allemand Kurt Hensel à la fin du XIX^e siècle et est devenue un outil important en arithmétique, où elle sert en particulier à résoudre certaines équations diophantiennes (ce sont des équations à coefficients entiers). Cette théorie est peu enseignée, alors qu'elle ouvre sur un monde de nombres aux propriétés étranges qu'on pourrait utiliser dans les classes des collèges et des lycées pour prouver aux élèves que les mathématiques sont un univers féérique.

Contrairement aux nombres habituels qui peuvent se convertir d'une base de numération à l'autre sans perdre leur identité, les nombres infinis à gauche ne supportent pas le changement de base. Si vous choisissez de travailler en base de numération décimale (ce que nous allons faire), il faut toujours y rester, et les résultats changent si vous changez de base. Dit autrement, il y a autant de catégories de nombres infinis à gauche qu'il y a de bases possibles.

Les nombres infinis à gauche en base 10 sont les nombres décadiques. On les a parfois dénommés *brénoms*, qui signifie nombre en verlan, car ils s'étendent vers la gauche sans limite, comme les nombres habituels (les nombres dits réels) s'étendent vers la droite sans limite. Lorsqu'on se place en base n plutôt que 10, on parle de nombres n -adiques (la base s est bien sûr particulièrement douloureuse).

On peut leur mettre une virgule suivie d'un nombre fini de chiffres, ce qui est exactement la règle symétrique qu'on a avec les nombres réels : une infinité de chiffres après la virgule, mais seulement un nombre fini de chiffres avant la virgule. Un nombre décadique est donc par exemple :

$$\dots 179179179,345$$

les trois petits points signifiant qu'on répète infiniment la séquence 179 vers la gauche. Les nombres décadiques qui n'ont rien après la virgule sont les entiers décadiques.

Additionner les nombres décadiques ne pose pas de difficulté (voir la figure 1) :

```

.. 14141414,51
+ ..88888888,888
= ...03030303,398

```

On effectue l'addition en opérant comme à l'habitude le report des retenues qu'on imagine avoir le temps de poursuivre tranquillement jusqu'à la fin des temps.

Les nombres que nous avons pris en exemple sont périodiques, mais c'est par simple commodité, car on peut très bien en imaginer de non périodiques comme :

```

..... 1000001000010001001011
..... 2648323979853562951413

```

Une propriété étrange apparaît quand nous essayons certaines additions :

```

          9          ...123123,123
+...9999999991  +...876876,877
=...0000000000  =...000000,000

```

Nous pouvons obtenir 0 en additionnant deux nombres décadiques. Cela signifie simplement que ce que nous dénommons l'opposé d'un nombre décadique n'a pas besoin du signe – pour exister. L'opposé de 9, que nous notons habituellement –9, peut aussi s'écrire ici ...9999999991. Vous vérifierez sans peine que tout nombre décadique possède un opposé que l'on obtient en complémen-

tant ses chiffres (on remplace le dernier chiffre c par $10 - c$ et chaque autre chiffre par $9 - c$), ce qu'on écrit sous forme de règle : $...edcba = \dots(9 - e)(9 - d)(9 - c)(9 - b)(10 - a)$.

Cette façon de trouver l'opposé d'un nombre décadique montre que, dans le monde décadique, la notion de nombre positif n'a pas de sens. C'est une grande différence entre les nombres réels (infinis à droite) et les nombres décadiques (infinis à gauche), qui a pour conséquence qu'on ne sait pas classer les nombres décadiques d'une façon intéressante. Il peut paraître bizarre que des nombres

4. L'UNIVERS ÉTRANGE DES NOMBRES DÉCADIQUES

Le monde des nombres décadiques se distingue du monde des nombres réels sur plusieurs points importants, mais qui n'empêchent pas ce monde de nombres infinis d'être parfaitement cohérent.

Nombres automorphes

Il existe des solutions autres que 0 et 1 à l'équation $X^2 = X$. De tels nombres sont dénommés nombres automorphes. Il y a deux nombres automorphes, dont voici les 90 derniers chiffres :

$X_1 = \dots 108169802938509890062166509580863811000557423423230896109004106619977392256259918212890625$.
 $X_2 = \dots 891830197061490109937833490419136188999442576576769103890995893380022607743740081787109376$.
 Concrètement, cela signifie par exemple que, lorsque vous multipliez par lui-même un nombre se terminant par les dix derniers chiffres de X_1 , soit 8212890625, vous obtenez un nombre se terminant par les mêmes chiffres (il en va de même, bien sûr, pour les 20 derniers chiffres ou pour un nombre quelconque de chiffres pris à la fin de X_1 ou de X_2). Un procédé général pour connaître les chiffres de X_1 consiste à calculer les n derniers chiffres de 5 élevé au carré n fois de suite (soit 5^{2^n}). Le second nombre automorphe est lié au premier par la relation $X_1 + X_2 = 1$.

Diviseurs de zéro, nombres non inversibles

Lorsqu'on prend deux nombres réels non nuls, leur produit est non nul : on dit que, dans le monde des nombres réels, il n'y a pas de diviseurs de zéro. Dans le monde des nombres décadiques, en revanche, il y a des diviseurs de zéro, car le produit $X_1 X_2 = X_1(1 - X_1) = X_1 - X_1^2 = 0$.

Les nombres X_1 et X_2 ne sont pas nuls, mais leur produit est nul ! Concrètement, cela signifie qu'en multipliant le nombre composé des 20 derniers chiffres de X_1 avec celui composé des 20 derniers chiffres de X_2 , vous obtenez un nombre dont vous savez par avance que ses 20 derniers chiffres seront des 0 :

$92256259918212890625 \times 07743740081787109376 = 71440849772443471020000000000000000000$

Il existe bien d'autres diviseurs de zéro. En effet, le produit d'un nombre décadique Y quelconque par X_1 ou X_2 est encore un diviseur de zéro, puisque : $(Y X_1) X_2 = Y (X_1 X_2) = Y \times 0 = 0$.

Remarquons aussi que les diviseurs de zéro ne peuvent pas posséder d'inverse. Supposons que X_1 possède un inverse Z , alors : $X_2 = X_2 \cdot 1 = X_2 (X_1 Z) = (X_2 X_1) Z = 0 \cdot Z = 0$, ce qui est absurde, car X_2 n'est pas nul.

Le fait que certains nombres décadiques ne possèdent pas d'inverse explique que le monde des nombres décadiques est peu utilisé en mathématiques. Si, au lieu de calculer en base 10, on calculait en base p (p un nombre premier) alors les nombres p -adiques qui seraient ainsi définis auraient la propriété que tout nombre non nul possède un inverse, et il n'y aurait plus de diviseur de 0. On dit que, si p est un nombre premier, les nombres p -adiques forment un corps, et cette fois ce corps est très utile en arithmétique.

Racines carrées

Nous savons bien que, dans le monde des nombres réels, une équation de degré n possède au plus n solutions et qu'en particulier un nombre réel possède au plus deux racines carrées. Dans le monde des nombres décadiques, les choses vont différemment. D'abord, un nombre peut posséder jusqu'à 4 racines carrées. Vous vérifierez que $(2X_1 - 1)^2 = 1$, ce qui signifie que 1 possède non seulement les racines carrées 1 et –1 mais aussi les racines carrées $2X_1 - 1$ (et donc $1 - 2X_1$). Les équations de degré d peuvent, elles, posséder jusqu'à d^2 solutions (si, au lieu de se placer en base 10, on se plaçait en base n , n étant un nombre entier ayant k facteurs premiers distincts, alors d^2 deviendrait d^k).

Voici, par exemple, les derniers chiffres de deux racines carrées (autres que $r_1 = 2$ et $r_2 = -2$) de 4 :

$r_3 = \dots 70306307076415563983573520090430974960327148437502$.

$r_4 = \dots 29693692923584436016426479909569025039672851562498$.

Encore une étrangeté : alors que tout nombre entier 0, 1, 2, 3, ... possède une racine carrée dans le monde des nombres réels, il en va autrement dans le monde des nombres décadiques. Le nombre 2 n'a pas de racine carrée, ni 3, ni 5. Le nombre 41 (qui n'est pourtant pas un carré parfait d'entier) possède, lui, quatre racines carrées décadiques. Voici d'ailleurs les derniers chiffres d'une racine carrée décadique de 41 :

$\dots 780284689680810830084469701318156276927163008501664117627064056375743830738554067263241296179$.

Cela signifie que, si vous élevez ce nombre au carré, vous tomberez sur un nombre dont les derniers chiffres seront ...000041. Les nombres entiers inférieurs à 100 qui possèdent des racines carrées dans le monde décadique sont 1, 4, 9, 16, 25, 36, 41, 49, 64, 81 et 89.