

$$\begin{array}{r} \dots 14141414,51 \\ + \dots 88888888,888 \\ = \dots 03030303,398 \end{array}$$

On effectue l'addition en opérant comme à l'habitude le report des retenues qu'on imagine avoir le temps de poursuivre tranquillement jusqu'à la fin des temps.

Les nombres que nous avons pris en exemple sont périodiques, mais c'est par simple commodité, car on peut très bien en imaginer de non périodiques comme :

$$\begin{array}{l} \dots 1000001000010001001011 \\ \dots 2648323979853562951413 \end{array}$$

Une propriété étrange apparaît quand nous essayons certaines additions :

$$\begin{array}{r} 9 \qquad \dots 123123,123 \\ + \dots 9999999991 \qquad + \dots 876876,877 \\ = \dots 0000000000 \qquad = \dots 000000,000 \end{array}$$

Nous pouvons obtenir 0 en additionnant deux nombres décadiques. Cela signifie simplement que ce que nous dénommons l'opposé d'un nombre décadique n'a pas besoin du signe – pour exister. L'opposé de 9, que nous notons habituellement –9, peut aussi s'écrire ici ...9999999991. Vous vérifierez sans peine que tout nombre décadique possède un opposé que l'on obtient en complémen-

tant ses chiffres (on remplace le dernier chiffre c par $10 - c$ et chaque autre chiffre par $9 - c$), ce qu'on écrit sous forme de règle : $\dots edcba = \dots (9 - e) (9 - d) (9 - c) (9 - b) (10 - a)$.

Cette façon de trouver l'opposé d'un nombre décadique montre que, dans le monde décadique, la notion de nombre positif n'a pas de sens. C'est une grande différence entre les nombres réels (infinis à droite) et les nombres décadiques (infinis à gauche), qui a pour conséquence qu'on ne sait pas classer les nombres décadiques d'une façon intéressante. Il peut paraître bizarre que des nombres

4. L'UNIVERS ÉTRANGE DES NOMBRES DÉCADIQUES

Le monde des nombres décadiques se distingue du monde des nombres réels sur plusieurs points importants, mais qui n'empêchent pas ce monde de nombres infinis d'être parfaitement cohérent.

Nombres automorphes

Il existe des solutions autres que 0 et 1 à l'équation $X^2 = X$. De tels nombres sont dénommés nombres automorphes. Il y a deux nombres automorphes, dont voici les 90 derniers chiffres :

$X_1 = \dots 108169802938509890062166509580863811000557423423230896109004106619977392256259918212890625$.
 $X_2 = \dots 891830197061490109937833490419136188999442576576769103890995893380022607743740081787109376$.
 Concrètement, cela signifie par exemple que, lorsque vous multipliez par lui-même un nombre se terminant par les dix derniers chiffres de X_1 , soit 8212890625, vous obtenez un nombre se terminant par les mêmes chiffres (il en va de même, bien sûr, pour les 20 derniers chiffres ou pour un nombre quelconque de chiffres pris à la fin de X_1 ou de X_2). Un procédé général pour connaître les chiffres de X_1 consiste à calculer les n derniers chiffres de 5 élevé au carré n fois de suite (soit 5^{2^n}). Le second nombre automorphe est lié au premier par la relation $X_1 + X_2 = 1$.

Diviseurs de zéro, nombres non inversibles

Lorsqu'on prend deux nombres réels non nuls, leur produit est non nul : on dit que, dans le monde des nombres réels, il n'y a pas de diviseurs de zéro. Dans le monde des nombres décadiques, en revanche, il y a des diviseurs de zéro, car le produit $X_1 X_2 = X_1(1 - X_1) = X_1 - X_1^2 = 0$.

Les nombres X_1 et X_2 ne sont pas nuls, mais leur produit est nul ! Concrètement, cela signifie qu'en multipliant le nombre composé des 20 derniers chiffres de X_1 avec celui composé des 20 derniers chiffres de X_2 , vous obtenez un nombre dont vous savez par avance que ses 20 derniers chiffres seront des 0 :

$$92256259918212890625 \times 07743740081787109376 = 71440849772443471020000000000000000000$$

Il existe bien d'autres diviseurs de zéro. En effet, le produit d'un nombre décadique Y quelconque par X_1 ou X_2 est encore un diviseur de zéro, puisque : $(Y X_1) X_2 = Y (X_1 X_2) = Y \times 0 = 0$.

Remarquons aussi que les diviseurs de zéro ne peuvent pas posséder d'inverse. Supposons que X_1 possède un inverse Z , alors : $X_2 = X_2 \cdot 1 = X_2 (X_1 Z) = (X_2 X_1) Z = 0 \cdot Z = 0$, ce qui est absurde, car X_2 n'est pas nul.

Le fait que certains nombres décadiques ne possèdent pas d'inverse explique que le monde des nombres décadiques est peu utilisé en mathématiques. Si, au lieu de calculer en base 10, on calculait en base p (p un nombre premier) alors les nombres p -adiques qui seraient ainsi définis auraient la propriété que tout nombre non nul possède un inverse, et il n'y aurait plus de diviseur de 0. On dit que, si p est un nombre premier, les nombres p -adiques forment un corps, et cette fois ce corps est très utile en arithmétique.

Racines carrées

Nous savons bien que, dans le monde des nombres réels, une équation de degré n possède au plus n solutions et qu'en particulier un nombre réel possède au plus deux racines carrées. Dans le monde des nombres décadiques, les choses vont différemment. D'abord, un nombre peut posséder jusqu'à 4 racines carrées. Vous vérifierez que $(2X_1 - 1)^2 = 1$, ce qui signifie que 1 possède non seulement les racines carrées 1 et –1 mais aussi les racines carrées $2X_1 - 1$ (et donc $1 - 2X_1$). Les équations de degré d peuvent, elles, posséder jusqu'à d^2 solutions (si, au lieu de se placer en base 10, on se plaçait en base n , n étant un nombre entier ayant k facteurs premiers distincts, alors d^2 deviendrait d^k).

Voici, par exemple, les derniers chiffres de deux racines carrées (autres que $r_1 = 2$ et $r_2 = -2$) de 4 :

$$r_3 = \dots 70306307076415563983573520090430974960327148437502.$$

$$r_4 = \dots 29693692923584436016426479909569025039672851562498.$$

Encore une étrangeté : alors que tout nombre entier 0, 1, 2, 3, ... possède une racine carrée dans le monde des nombres réels, il en va autrement dans le monde des nombres décadiques. Le nombre 2 n'a pas de racine carrée, ni 3, ni 5. Le nombre 41 (qui n'est pourtant pas un carré parfait d'entier) possède, lui, quatre racines carrées décadiques. Voici d'ailleurs les derniers chiffres d'une racine carrée décadique de 41 :

$$\dots 780284689680810830084469701318156276927163008501664117627064056375743830738554067263241296179.$$

Cela signifie que, si vous élevez ce nombre au carré, vous tomberez sur un nombre dont les derniers chiffres seront ...000041. Les nombres entiers inférieurs à 100 qui possèdent des racines carrées dans le monde décadique sont 1, 4, 9, 16, 25, 36, 41, 49, 64, 81 et 89.

5. NOMBRES RÉELS ET DÉCADIQUES PÉRIODIQUES

Si s est une suite finie de chiffres de longueur p , alors le nombre décadique $...ssss$ vaut $-s/(10^p - 1)$ et le nombre réel $0,ssss...$ vaut $s/(10^p - 1)$. Tout est là.

En effet, d'une part avec des nombres décadiques, $...ssss - (10^p \dots sss) = s$ (exemple, avec $s = 51$, donc $p = 2$, $...515151515151 - 515151515100 = 51$). D'autre part, avec des nombres réels, on a : $10^p \cdot 0,ssss... - 0,ssss... = s$ (exemple : $51,51515151... - 0,5151515151... = 51$).

On en déduit que, comme cela se passe dans le monde des nombres réels, les nombres décadiques périodiques à partir d'un certain point sont les quotients de deux entiers naturels (c'est-à-dire les fractions au sens habituel du terme : $12/47$, $-32/1997$, etc.). Il en résulte aussi que le produit de deux nombres décadiques périodiques est toujours périodique.

Ces égalités résolvent les coïncidences posées au début de l'article :

$1+20+400+8000+160000+... = 1/(1-20) = -1/19$ (d'après la formule de la série géométrique en décadique). Le calcul en nombres réels de $1/19$ donne un résultat de la forme $0,ssss$ pour une certaine séquence s de chiffres. D'après les deux lignes du haut, la même séquence de s donne l'écriture de $-1/19$ en décadique.

ne se classent pas, et donc ne puissent pas servir à ordonner quoi que ce soit, mais c'est aussi ce qui se passe pour les nombres complexes. Nombre d'autres propriétés des nombres décadiques justifient cependant qu'on les dénomme nombres.

La soustraction se définit sans problème soit en généralisant l'opération habituelle, soit en indiquant que soustraire x c'est additionner $-x$, ce qui, nous le constatons, revient au même.

$...2222222222 \quad 123123,123$
 $- \quad \quad \quad 5 \quad - \quad ...999999,999$
 $= ...2222222217 \quad = ...123123,124$

LA MULTIPLICATION

Pour la multiplication, on ne rencontre pas de difficultés particulières non plus : on utilise la méthode usuelle apprise à l'école, qu'on imagine poursuivre à l'infini (voir la figure 2).

Notre exemple porte sur des nombres périodiques, mais il n'y a bien sûr aucune obligation à cela, et la multiplication est définie pour tous les nombres décadiques. Que le produit de deux nombres périodiques le soit aussi est une propriété générale.

L'addition et la multiplication ainsi définies possèdent toutes les bonnes propriétés qu'on attend : $a+b=b+a$, $(a+b)+c=a+(b+c)$, $a \times b=b \times a$, $(a \times b) \times c=a \times (b \times c)$, $(a+b) \times c=a \times c+b \times c$, etc. Le mathématicien dit que l'ensemble des nombres décadiques est un anneau commutatif, mais peu importe. Certaines choses surprenantes se produisent :

$...2857142857143 \times 7 = 1$.
 $...765432098765432 \times 9 = ...8888888888$

La première des égalités signifie que 7 possède un inverse qui est $...2857142857143$, et l'on peut donc écrire : $...2857142857143 = 1/7$.

La question de savoir quels nombres décadiques possèdent un inverse conduit à s'interroger sur ce que serait l'opération de division.

LA DIVISION

Notons d'abord que, grâce au système des virgules, on peut toujours diviser un nombre décadique par 2 et par 5 :

$...11111111 : 2 = ...55555555,5$
 $...321321321 : 5 = ...64264264,2$

Nous pouvons donc toujours diviser un nombre décadique par n importe quel nombre de la forme $2^n \times 5^m$.

Pour les autres nombres, en particulier pour tous les nombres infinis $...dcba$, nous pouvons tenter d'effectuer l'opération de division décadique décrite à la figure 2. Cette opération consiste à faire apparaître des zéros progressivement à droite dans les restes successifs. Un peu d'attention montre que c'est possible si le dernier chiffre a du diviseur $...dcba$ donne, lorsqu'on le multiplie par 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, des nombres se terminant par tous les chiffres possibles 0, 1, ..., 9 (pas toujours dans cet ordre).

C'est évidemment vrai si $a = 1$. C'est vrai aussi si $a = 3$, car $3 \times 0 = 0$; $3 \times 1 = 3$; $3 \times 2 = 6$; $3 \times 3 = 9$; $3 \times 4 = 12$; $3 \times 5 = 15$; $3 \times 6 = 18$; $3 \times 7 = 21$; $3 \times 8 = 24$; $3 \times 9 = 27$. On vérifie que c'est encore vrai pour 7 et pour 9, mais pas pour 0, 2, 4, 6, 8.

En résumé l'opération de division décadique peut donc se faire si le dernier chiffre du diviseur $...dcba$ est 1, 3, 7 et 9. (Dans le cas général où nous considérons la base n à la place de 10, il faut que a soit premier avec n).

Lorsque ce n'est pas le cas, tout n'est pas perdu, nous divisons le numérateur et le dénominateur de la fraction que nous cherchons à calculer par 2 ou par 5 (ce qui est toujours possible) pour faire disparaître du diviseur les chiffres terminaux 0, 2, 4, 5, 6 et 8 qui gênent. Nous espérons trouver, au bout d'un nombre fini d'essais, un dénominateur qui se termine par 1, 3, 7 ou 9. C'est presque toujours le cas. Pour certains nombres décadiques étranges, cependant, jamais nous ne réussirons. En voici deux (la figure 4 explique comment les calculer) :

$X_1 = ...3953007319108169802938509890$
 $062166509580863811000557423423230$
 $896109004106619977392256259918212$
 $890625.$

$X_2 = ...6046992680891830197061490109$
 $937833490419136188999442576576769$
 $103890995893380022607743740081787$
 $109376.$

Le premier est indéfiniment divisible par 5 (jamais on ne trouve un résultat se terminant par 1, 3, 7 ou 9 quand on le divise par 5) le second est indéfiniment divisible par 2.

Ces deux nombres ont une autre propriété remarquable, qui n'a pas d'équivalent dans le monde des nombres réels : leur produit est nul : $X_1 \times X_2 = 0$.

Nous disons que X_1 et X_2 sont des diviseurs de zéro (et que l'anneau des nombres décadiques n'est pas intègre). Chacun de ces nombres a aussi l'étrange propriété d'être égal à son carré. Nous disons que X_1 et X_2 sont des nombres automorphes. Il n'y en a aucun autre, mis à part bien sûr 0 et 1.

$$(X_1)^2 = X_1 ; (X_2)^2 = X_2.$$

Bien d'autres propriétés étonnantes des nombres décadiques montrent que l'on peut «compter» sur eux. Le monde des nombres décadiques permet de comprendre en profondeur et sans raisonnement compliqué les additions infinies du second type, qui correspondent à des séries géométriques (comme les additions infinies du premier type correspondaient à des séries géométriques dans le monde des nombres réels). On peut alors sans mal inventer de nouvelles additions infinies comme celle-ci, qui plaira aux superstitieux. On part de 46 et on multiplie par 7 pour chaque nouvelle ligne :

$$\begin{array}{r} 46 \\ + 322 \\ + 2254 \\ + 15778 \\ + 119446 \\ \hline \dots 6666666 \end{array}$$

Roger CUCULIÈRE, À l'horizon de l'arithmétique décimale : les nombres 10-adiques, in Pour la Science, juin 1986.

H.-D. EBBINGHAUS et J. NEUKIRCH, Les nombres (chapitre 6), Vuibert, 1998 (uniquement les p -adiques avec p premier).

R. FERRÉOL, Les brenoms, Notes d'exposé communiquées par l'auteur.

M. GUINOT, Les nombres be-adiques, IREM de Lyon, 1987.

V. LEFÈVRE, Les brenoms, janvier 1994. Texte à télécharger à l'adresse : www.ens-lyon.fr/~vlefevre (précis, accessible et assez complet).

J.-P. SERRE, Cours d'arithmétique, PUF, Paris, 1970.