

5. NOMBRES RÉELS ET DÉCADIQUES PÉRIODIQUES

Si s est une suite finie de chiffres de longueur p , alors le nombre décadique $...ssss$ vaut $-s/(10^p - 1)$ et le nombre réel $0,ssss...$ vaut $s/(10^p - 1)$. Tout est là.

En effet, d'une part avec des nombres décadiques, $...ssss - (10^p \dots sss) = s$ (exemple, avec $s = 51$, donc $p = 2$, $...515151515151 - 515151515100 = 51$). D'autre part, avec des nombres réels, on a : $10^p \cdot 0,ssss... - 0,ssss... = s$ (exemple : $51,51515151... - 0,5151515151... = 51$).

On en déduit que, comme cela se passe dans le monde des nombres réels, les nombres décadiques périodiques à partir d'un certain point sont les quotients de deux entiers naturels (c'est-à-dire les fractions au sens habituel du terme : $12/47$, $-32/1997$, etc.). Il en résulte aussi que le produit de deux nombres décadiques périodiques est toujours périodique.

Ces égalités résolvent les coïncidences posées au début de l'article :

$1+20+400+8000+160000+... = 1/(1-20) = -1/19$ (d'après la formule de la série géométrique en décadique). Le calcul en nombres réels de $1/19$ donne un résultat de la forme $0,ssss$ pour une certaine séquence s de chiffres. D'après les deux lignes du haut, la même séquence de s donne l'écriture de $-1/19$ en décadique.

ne se classent pas, et donc ne puissent pas servir à ordonner quoi que ce soit, mais c'est aussi ce qui se passe pour les nombres complexes. Nombre d'autres propriétés des nombres décadiques justifient cependant qu'on les dénomme nombres.

La soustraction se définit sans problème soit en généralisant l'opération habituelle, soit en indiquant que soustraire x c'est additionner $-x$, ce qui, nous le constatons, revient au même.

$$\begin{array}{r} ...2222222222 \quad 123123,123 \\ - \quad \quad \quad 5 \quad - \quad ...999999,999 \\ = ...2222222217 \quad = ...123123,124 \end{array}$$

LA MULTIPLICATION

Pour la multiplication, on ne rencontre pas de difficultés particulières non plus : on utilise la méthode usuelle apprise à l'école, qu'on imagine poursuivre à l'infini (voir la figure 2).

Notre exemple porte sur des nombres périodiques, mais il n'y a bien sûr aucune obligation à cela, et la multiplication est définie pour tous les nombres décadiques. Que le produit de deux nombres périodiques le soit aussi est une propriété générale.

L'addition et la multiplication ainsi définies possèdent toutes les bonnes propriétés qu'on attend : $a+b=b+a$, $(a+b)+c=a+(b+c)$, $a \times b=b \times a$, $(a \times b) \times c=a \times (b \times c)$, $(a+b) \times c=a \times c+b \times c$, etc. Le mathématicien dit que l'ensemble des nombres décadiques est un anneau commutatif, mais peu importe. Certaines choses surprenantes se produisent :

$$...2857142857143 \times 7 = 1.$$

$$...765432098765432 \times 9 = ...8888888888$$

La première des égalités signifie que 7 possède un inverse qui est $...2857142857143$, et l'on peut donc écrire :

$$...2857142857143 = 1/7.$$

La question de savoir quels nombres décadiques possèdent un inverse conduit à s'interroger sur ce que serait l'opération de division.

LA DIVISION

Notons d'abord que, grâce au système des virgules, on peut toujours diviser un nombre décadique par 2 et par 5 :

$$\begin{array}{l} ...11111111 : 2 = ...55555555,5 \\ ...321321321 : 5 = ...64264264,2 \end{array}$$

Nous pouvons donc toujours diviser un nombre décadique par n'importe quel nombre de la forme $2^n \times 5^m$.

Pour les autres nombres, en particulier pour tous les nombres infinis $...dcba$, nous pouvons tenter d'effectuer l'opération de division décadique décrite à la figure 2. Cette opération consiste à faire apparaître des zéros progressivement à droite dans les restes successifs. Un peu d'attention montre que c'est possible si le dernier chiffre a du diviseur $...dcba$ donne, lorsqu'on le multiplie par 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, des nombres se terminant par tous les chiffres possibles 0, 1, ..., 9 (pas toujours dans cet ordre).

C'est évidemment vrai si $a = 1$. C'est vrai aussi si $a = 3$, car $3 \times 0 = 0$; $3 \times 1 = 3$; $3 \times 2 = 6$; $3 \times 3 = 9$; $3 \times 4 = 12$; $3 \times 5 = 15$; $3 \times 6 = 18$; $3 \times 7 = 21$; $3 \times 8 = 24$; $3 \times 9 = 27$. On vérifie que c'est encore vrai pour 7 et pour 9, mais pas pour 0, 2, 4, 6, 8.

En résumé l'opération de division décadique peut donc se faire si le dernier chiffre du diviseur $...dcba$ est 1, 3, 7 et 9. (Dans le cas général où nous considérons la base n à la place de 10, il faut que a soit premier avec n).

Lorsque ce n'est pas le cas, tout n'est pas perdu, nous divisons le numérateur et le dénominateur de la fraction que nous cherchons à calculer par 2 ou par 5 (ce qui est toujours possible) pour faire disparaître du diviseur les chiffres terminaux 0, 2, 4, 5, 6 et 8 qui gênent. Nous espérons trouver, au bout d'un nombre fini d'essais, un dénominateur qui se termine le cas. Pour certains nombres décadiques étranges, cependant, jamais nous ne réussirons. En voici deux (la figure 4 explique comment les calculer) :

$$X_1 = ...3953007319108169802938509890 \\ 062166509580863811000557423423230 \\ 896109004106619977392256259918212 \\ 890625.$$

$$X_2 = ...6046992680891830197061490109 \\ 937833490419136188999442576576769 \\ 103890995893380022607743740081787 \\ 109376.$$

Le premier est indéfiniment divisible par 5 (jamais on ne trouve un résultat se terminant par 1, 3, 7 ou 9 quand on le divise par 5) le second est indéfiniment divisible par 2.

Ces deux nombres ont une autre propriété remarquable, qui n'a pas d'équivalent dans le monde des nombres réels : leur produit est nul : $X_1 \times X_2 = 0$.

Nous disons que X_1 et X_2 sont des diviseurs de zéro (et que l'anneau des nombres décadiques n'est pas intègre). Chacun de ces nombres a aussi l'étrange propriété d'être égal à son carré. Nous disons que X_1 et X_2 sont des nombres automorphes. Il n'y en a aucun autre, mis à part bien sûr 0 et 1.

$$(X_1)^2 = X_1 ; (X_2)^2 = X_2.$$

Bien d'autres propriétés étonnantes des nombres décadiques montrent que l'on peut «compter» sur eux. Le monde des nombres décadiques permet de comprendre en profondeur et sans raisonnablement compliqué les additions infinies du second type, qui correspondent à des séries géométriques (comme les additions infinies du premier type correspondaient à des séries géométriques dans le monde des nombres réels). On peut alors sans mal inventer de nouvelles additions infinies comme celle-ci, qui plaira aux superstitieux. On part de 46 et on multiplie par 7 pour chaque nouvelle ligne :

$$\begin{array}{r} 46 \\ + 322 \\ + 2254 \\ + 15778 \\ + 119446 \\ \\ ...66666666 \end{array}$$

Roger CUCULIÈRE, À l'horizon de l'arithmétique décimale : les nombres 10-adiques, in Pour la Science, juin 1986.

H.-D. EBBINGHAUS et J. NEUKIRCH, Les nombres (chapitre 6), Vuibert, 1998 (uniquement les p -adiques avec p premier).

R. FERRÉOL, Les brenoms, Notes d'exposé communiquées par l'auteur.

M. GUINOT, Les nombres be-adiques, IREM de Lyon, 1987.

V. LEFÈVRE, Les brenoms, janvier 1994. Texte à télécharger à l'adresse : www.ens-lyon.fr/~vlefevre (précis, accessible et assez complet).

J.-P. SERRE, Cours d'arithmétique, PUF, Paris, 1970.