

5. NOMBRES RÉELS ET DÉCADIQUES PÉRIODIQUES

Si s est une suite finie de chiffres de longueur p , alors le nombre décadique $\dots ssss$ vaut $-s/(10^p - 1)$ et le nombre réel $0,ssss\dots$ vaut $s/(10^p - 1)$. Tout est là.

En effet, d'une part avec des nombres décadiques, $\dots ssss - (10^p \dots ssss) = s$ (exemple, avec $s = 51$, donc $p = 2$, $\dots 515151515151 - 515151515100 = 51$). D'autre part, avec des nombres réels, on a : $10^p 0,ssss\dots - 0,ssss\dots = s$ (exemple : $51,515151\dots - 0,51515151\dots = 51$).

On en déduit que, comme cela se passe dans le monde des nombres réels, les nombres décadiques périodiques à partir d'un certain point sont les quotients de deux entiers naturels (c'est-à-dire les fractions au sens habituel du terme : $12/47$, $-32/1997$, etc.). Il en résulte aussi que le produit de deux nombres décadiques périodiques est toujours périodique.

Ces égalités résolvent les coïncidences posées au début de l'article :

$1+20+400+8000+160000+\dots = 1/(1-20) = -1/19$ (d'après la formule de la série géométrique en décadique). Le calcul en nombres réels de $1/19$ donne un résultat de la forme $0,ssss$ pour une certaine séquence s de chiffres. D'après les deux lignes du haut, la même séquence de s donne l'écriture de $-1/19$ en décadique.

ne se classent pas, et donc ne puissent pas servir à ordonner quoi que ce soit, mais c'est aussi ce qui se passe pour les nombres complexes. Nombre d'autres propriétés des nombres décadiques justifient cependant qu'on les dénomme nombres.

La soustraction se définit sans problème soit en généralisant l'opération habituelle, soit en indiquant que soustraire x c'est additionner $-x$, ce qui, nous le constatons, revient au même.

$$\begin{array}{r} \dots 2222222222 \quad 123123,123 \\ - \quad \quad \quad 5 \quad - \dots 999999,999 \\ = \dots 2222222217 \quad = \dots 123123,124 \end{array}$$

LA MULTIPLICATION

Pour la multiplication, on ne rencontre pas de difficultés particulières non plus : on utilise la méthode usuelle apprise à l'école, qu'on imagine poursuivre à l'infini (voir la figure 2).

Notre exemple porte sur des nombres périodiques, mais il n'y a bien sûr aucune obligation à cela, et la multiplication est définie pour tous les nombres décadiques. Que le produit de deux nombres périodiques le soit aussi est une propriété générale.

L'addition et la multiplication ainsi définies possèdent toutes les bonnes propriétés qu'on attend : $a+b=b+a$, $(a+b)+c=a+(b+c)$, $a \times b = b \times a$, $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$, $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$, etc. Le mathématicien dit que l'ensemble des nombres décadiques est un anneau commutatif, mais peu importe. Certaines choses surprenantes se produisent :

$$\dots 2857142857143 \times 7 = 1.$$

$$\dots 765432098765432 \times 9 = \dots 8888888888$$

La première des égalités signifie que 7 possède un inverse qui est $\dots 2857142857143$, et l'on peut donc écrire : $\dots 2857142857143 = 1/7$.

La question de savoir quels nombres décadiques possèdent un inverse conduit à s'interroger sur ce que serait l'opération de division.

LA DIVISION

Notons d'abord que, grâce au système des virgules, on peut toujours diviser un nombre décadique par 2 et par 5 :

$$\begin{array}{l} \dots 11111111 : 2 = \dots 5555555,5 \\ \dots 321321321 : 5 = \dots 64264264,2 \end{array}$$

Nous pouvons donc toujours diviser un nombre décadique par n importe quel nombre de la forme $2^n \times 5^m$.

Pour les autres nombres, en particulier pour tous les nombres infinis $\dots dcba$, nous pouvons tenter d'effectuer l'opération de division décadique décrite à la figure 2. Cette opération consiste à faire apparaître des zéros progressivement à droite dans les restes successifs. Un peu d'attention montre que c'est possible si le dernier chiffre a du diviseur $\dots dcba$ donne, lorsqu'on le multiplie par 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, des nombres se terminant par tous les chiffres possibles 0, 1, ..., 9 (pas toujours dans cet ordre).

C'est évidemment vrai si $a = 1$. C'est vrai aussi si $a = 3$, car $3 \times 0 = 0$; $3 \times 1 = 3$; $3 \times 2 = 6$; $3 \times 3 = 9$; $3 \times 4 = 12$; $3 \times 5 = 15$; $3 \times 6 = 18$; $3 \times 7 = 21$; $3 \times 8 = 24$; $3 \times 9 = 27$. On vérifie que c'est encore vrai pour 7 et pour 9, mais pas pour 0, 2, 4, 6, 8.

En résumé l'opération de division décadique peut donc se faire si le dernier chiffre du diviseur $\dots dcba$ est 1, 3, 7 et 9. (Dans le cas général où nous considérons la base n à la place de 10, il faut que a soit premier avec n).

Lorsque ce n'est pas le cas, tout n'est pas perdu, nous divisons le numérateur et le dénominateur de la fraction que nous cherchons à calculer par 2 ou par 5 (ce qui est toujours possible) pour faire disparaître du diviseur les chiffres terminaux 0, 2, 4, 5, 6 et 8 qui gênent. Nous espérons trouver, au bout d'un nombre fini d'essais, un dénominateur qui se termine par 1, 3, 7 ou 9. C'est presque toujours le cas. Pour certains nombres décadiques étranges, cependant, jamais nous ne réussirons. En voici deux (la figure 4 explique comment les calculer) :

$$X_1 = \dots 3953007319108169802938509890 \\ 062166509580863811000557423423230 \\ 896109004106619977392256259918212 \\ 890625.$$

$$X_2 = \dots 6046992680891830197061490109 \\ 937833490419136188999442576576769 \\ 103890995893380022607743740081787 \\ 109376.$$

Le premier est indéfiniment divisible par 5 (jamais on ne trouve un résultat se terminant par 1, 3, 7 ou 9 quand on le divise par 5) le second est indéfiniment divisible par 2.

Ces deux nombres ont une autre propriété remarquable, qui n'a pas d'équivalent dans le monde des nombres réels : leur produit est nul : $X_1 \times X_2 = 0$.

Nous disons que X_1 et X_2 sont des diviseurs de zéro (et que l'anneau des nombres décadiques n'est pas intègre). Chacun de ces nombres a aussi l'étrange propriété d'être égal à son carré. Nous disons que X_1 et X_2 sont des nombres automorphes. Il n'y en a aucun autre, mis à part bien sûr 0 et 1.

$$(X_1)^2 = X_1 ; (X_2)^2 = X_2.$$

Bien d'autres propriétés étonnantes des nombres décadiques montrent que l'on peut «compter» sur eux. Le monde des nombres décadiques permet de comprendre en profondeur et sans raisonnement compliqué les additions infinies du second type, qui correspondent à des séries géométriques (comme les additions infinies du premier type correspondaient à des séries géométriques dans le monde des nombres réels). On peut alors sans mal inventer de nouvelles additions infinies comme celle-ci, qui plaira aux superstitieux. On part de 46 et on multiplie par 7 pour chaque nouvelle ligne :

$$\begin{array}{r} \quad \quad \quad 46 \\ \quad \quad + 322 \\ \quad \quad + 2254 \\ \quad \quad + 15778 \\ \quad + 119446 \\ \hline \dots 66666666 \end{array}$$

Roger CUCULIÈRE, À l'horizon de l'arithmétique décimale : les nombres 10-adiques, in Pour la Science, juin 1986.

H.-D. EBBINGHAUS et J. NEUKIRCH, Les nombres (chapitre 6), Vuibert, 1998 (uniquement les p -adiques avec p premier).

R. FERRÉOL, Les brenoms, Notes d'exposé communiquées par l'auteur.

M. GUINOT, Les nombres be-adiques, IREM de Lyon, 1987.

V. LEFÈVRE, Les brenoms, janvier 1994. Texte à télécharger à l'adresse : www.ens-lyon.fr/~vlefevre (précis, accessible et assez complet).

J.-P. SERRE, Cours d'arithmétique, PUF, Paris, 1970.



Hex : le jeu des hexagones

IAN STEWART

Quelques connexions gagnantes de ce jeu de stratégie.

Las des jeux de société ? Si oui, essayez Hex. Ce petit jeu pour deux est aussi captivant que les meilleurs des jeux électroniques et tellement plus stimulant ! On joue plus facilement à Hex depuis qu'un passionné du jeu, l'Australien Cameron Browne, lui a consacré un livre, désormais indispensable à tous les passionnés de la théorie des jeux.

Hex se joue à deux, sur un plateau pavé de cases hexagonales (voir la figure 2). D'ordinaire, ce plateau a la forme d'un losange de 11 cases de côté. Chacun des joueurs est maître de deux des côtés opposés de ce losange, à l'exception des cases placées aux coins, qui sont propriété commune. L'objectif de chaque joueur est simple : placer un à un ses pions (bleus ou rouges) afin de relier ses deux côtés par une chaîne de pions, que cette dernière soit tortueuse ou qu'elle ait des embranchements ou des boucles. Facile ? Pas tant que cela. Qui a essayé, sait à quel point Hex est subtil.

Le jeu est une invention de Piet Hein, un mathématicien danois du milieu du XX^e siècle, connu aussi pour sa poésie. Apparu pour la première fois dans l'édition du 26 décembre 1942 du journal danois *Politiken*, il fut réinventé par le mathématicien américain John Nash en 1948. Alors étudiant à l'Université de Princeton, Nash était un passionné des jeux, auxquels il consacra de nombreuses recherches. Il obtiendra d'ailleurs le prix Nobel d'économie pour l'application de ses travaux en théorie des jeux à ce domaine. À Princeton, les toilettes pavées de carreaux hexagonaux étaient les seuls endroits où les étudiants passionnés par Hex, mais désargentés, pouvaient se livrer des duels !

Malheureusement, Hex est presque impossible à trouver dans le commerce ! En 1957, Martin Gardner, consacre un article à ce jeu dans les colonnes de

Scientific American : en une semaine, Hex devient la nouvelle marotte des laboratoires de mathématiques.

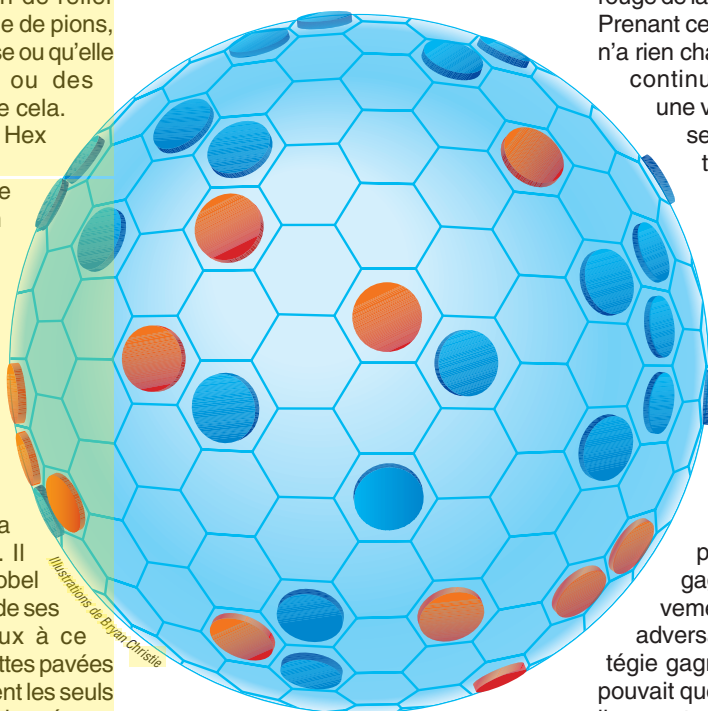
Comment joue-t-on à Hex ? Tout d'abord, il n'y a que 11×11 , soit 121, positions possibles. De plus, dès que l'un des joueurs établit une chaîne, son adversaire ne peut plus en établir : il a nécessairement perdu. En fait, il existe même une façon optimale de jouer qui garantit la victoire au premier joueur, celui qui pose le premier pion de la partie.

La démonstration de ce fait repose sur une méthode curieuse, celle du « voleur de tactique ». Supposons qu'une tactique gagnante existe bien, non pas pour le premier joueur (qui joue les rouges), mais pour le second (qui joue les bleus)

et montrons que cette hypothèse aboutit à un paradoxe. Cette « stratégie gagnante » pour le second joueur est connue des deux adversaires ; par hypothèse, celui qui place le second pion de la partie (le premier bleu) gagne forcément s'il l'applique. Que peut faire le premier joueur pour gagner quand même ? Rien, par hypothèse ! Cependant, comme il est humain, donc subjectif, il tente sa chance. Que fait-il ? Il dépose un premier pion rouge, puis, pendant qu'il attend son tour, décide de faire comme s'il jouait en second. Dès ce moment (pour lui-même), il est le second joueur qui applique correctement la stratégie gagnante : dès qu'un pion bleu est placé, le rouge est placé selon la stratégie du second joueur. Le premier pion rouge de la partie devient le « pion oublié ».

Prenant cette décision, le premier joueur n'a rien changé pour son adversaire, qui continue de son côté à jouer pour une victoire assurée. On peut alors se dire qu'à un moment de la partie, le premier joueur doit occuper une case déjà prise par le « pion oublié ». Est-ce réhibitoyre ? Non, parce que cette case est déjà occupée par un pion rouge, de la couleur nécessaire pour que la stratégie gagnante soit correctement appliquée : cette position devient stratégique, et le premier joueur place alors son pion rouge n'importe où, puis « l'oublie ».

En volant la stratégie du premier joueur, le joueur rouge gagne, quels que soient les mouvements des pions bleus. Or, son adversaire appliquait lui aussi la stratégie gagnante qui, par hypothèse, ne pouvait que le faire gagner, lui aussi. Or, il ne peut y avoir deux gagnants. Conclusion : l'hypothèse est fautive. Il n'existe pas de stratégie gagnante qui fasse gagner à coup sûr le joueur qui dépose le deuxième pion de la partie. Rappelons maintenant que Hex se termine toujours par la victoire de l'un des joueurs.



1. Jouez à la balle avec Hex ! Vous avez le choix. Divers jeux d'Hex se pratiquent sur une sphère pavée d'hexagones et de 12 pentagones (lesquels ne peuvent s'apercevoir sous l'angle observé ici). Le premier joueur qui parvient à boucler une chaîne autour d'une ou de plusieurs cases a gagné.