



Hex : le jeu des hexagones

IAN STEWART

Quelques connexions gagnantes de ce jeu de stratégie.

Las des jeux de société ? Si oui, essayez Hex. Ce petit jeu pour deux est aussi captivant que les meilleurs des jeux électroniques et tellement plus stimulant ! On joue plus facilement à Hex depuis qu'un passionné du jeu, l'Australien Cameron Browne, lui a consacré un livre, désormais indispensable à tous les passionnés de la théorie des jeux.

Hex se joue à deux, sur un plateau pavé de cases hexagonales (voir la figure 2). D'ordinaire, ce plateau a la forme d'un losange de 11 cases de côté. Chacun des joueurs est maître de deux des côtés opposés de ce losange, à l'exception des cases placées aux coins, qui sont propriété commune. L'objectif de chaque joueur est simple : placer un à un ses pions (bleus ou rouges) afin de relier ses deux côtés par une chaîne de pions, que cette dernière soit tortueuse ou qu'elle ait des embranchements ou des boucles. Facile ? Pas tant que cela. Qui a essayé, sait à quel point Hex est subtil.

Le jeu est une invention de Piet Hein, un mathématicien danois du milieu du XX^e siècle, connu aussi pour sa poésie. Apparu pour la première fois dans l'édition du 26 décembre 1942 du journal danois *Politiken*, il fut réinventé par le mathématicien américain John Nash en 1948. Alors étudiant à l'Université de Princeton, Nash était un passionné des jeux, auxquels il consacra de nombreuses recherches. Il obtiendra d'ailleurs le prix Nobel d'économie pour l'application de ses travaux en théorie des jeux à ce domaine. À Princeton, les toilettes pavées de carreaux hexagonaux étaient les seuls endroits où les étudiants passionnés par Hex, mais désargentés, pouvaient se livrer des duels !

Malheureusement, Hex est presque impossible à trouver dans le commerce ! En 1957, Martin Gardner, consacre un article à ce jeu dans les colonnes de

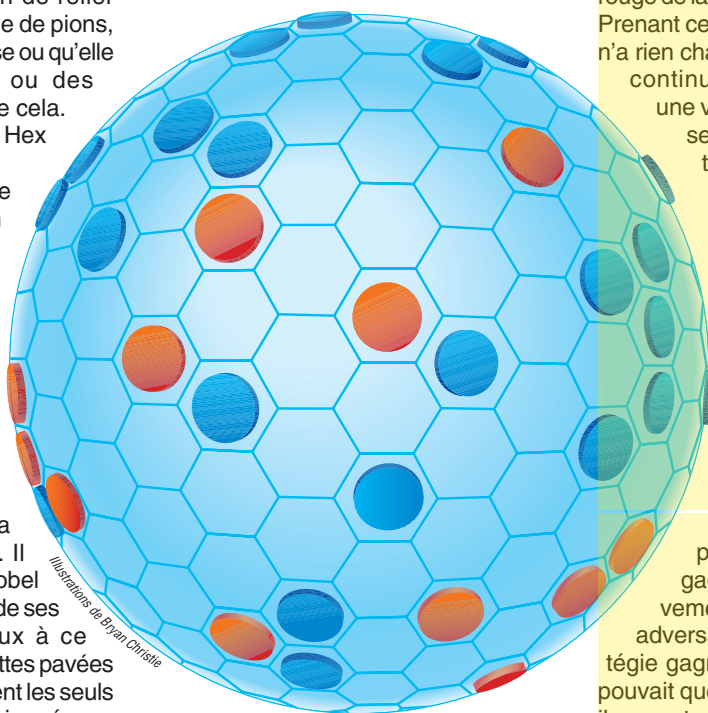
Scientific American : en une semaine, Hex devient la nouvelle marotte des laboratoires de mathématiques.

Comment joue-t-on à Hex ? Tout d'abord, il n'y a que 11×11 , soit 121, positions possibles. De plus, dès que l'un des joueurs établit une chaîne, son adversaire ne peut plus en établir : il a nécessairement perdu. En fait, il existe même une façon optimale de jouer qui garantit la victoire au premier joueur, celui qui pose le premier pion de la partie.

La démonstration de ce fait repose sur une méthode curieuse, celle du « voleur de tactique ». Supposons qu'une tactique gagnante existe bien, non pas pour le premier joueur (qui joue les rouges), mais pour le second (qui joue les bleus)

et montrons que cette hypothèse aboutit à un paradoxe. Cette « stratégie gagnante » pour le second joueur est connue des deux adversaires ; par hypothèse, celui qui place le second pion de la partie (le premier bleu) gagne forcément s'il l'applique. Que peut faire le premier joueur pour gagner quand même ? Rien, par hypothèse ! Cependant, comme il est humain, donc subjectif, il tente sa chance. Que fait-il ? Il dépose un premier pion rouge, puis, pendant qu'il attend son tour, décide de faire comme s'il jouait en second. Dès ce moment (pour lui-même), il est le second joueur qui applique correctement la stratégie gagnante : dès qu'un pion bleu est placé, le rouge est placé selon la stratégie du second joueur. Le premier pion rouge de la partie devient le « pion oublié ». Prenant cette décision, le premier joueur n'a rien changé pour son adversaire, qui continue de son côté à jouer pour une victoire assurée. On peut alors se dire qu'à un moment de la partie, le premier joueur doit occuper une case déjà prise par le « pion oublié ». Est-ce rédhibitoire ? Non, parce que cette case est déjà occupée par un pion rouge, de la couleur nécessaire pour que la stratégie gagnante soit correctement appliquée : cette position devient stratégique, et le premier joueur place alors son pion rouge n'importe où, puis « l'oublie ».

En volant la stratégie du premier joueur, le joueur rouge gagne, quels que soient les mouvements des pions bleus. Or, son adversaire appliquait lui aussi la stratégie gagnante qui, par hypothèse, ne pouvait que le faire gagner, lui aussi. Or, il ne peut y avoir deux gagnants. Conclusion : l'hypothèse est fautive. Il n'existe pas de stratégie gagnante qui fasse gagner à coup sûr le joueur qui dépose le deuxième pion de la partie. Rappelons maintenant que Hex se termine toujours par la victoire de l'un des joueurs.



1. Jouez à la balle avec Hex ! Vous avez le choix. Divers jeux d'Hex se pratiquent sur une sphère pavée d'hexagones et de 12 pentagones (lesquels ne peuvent s'apercevoir sous l'angle observé ici). Le premier joueur qui parvient à boucler une chaîne autour d'une ou de plusieurs cases a gagné.

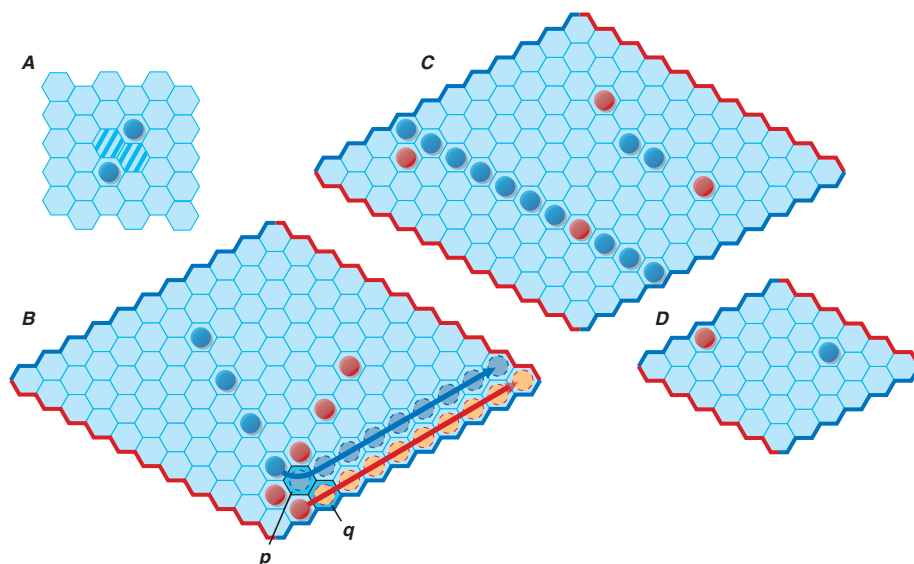
Si c'est le cas et si le second joueur ne peut forcer la victoire, c'est que seul le premier le peut. Ainsi, il existe une stratégie gagnante pour le joueur qui dépose le premier pion.

Cette démonstration semble départir Hex de tout intérêt. Pensez donc, un jeu où le deuxième joueur n'a jamais sa chance ! Toutefois, montrer l'existence d'une stratégie gagnante ne revient pas à la découvrir. La stratégie que doit appliquer le premier joueur pour gagner n'est connue que pour un losange d'une dimension maximale de 7×7 . À partir de 8×8 , le joueur qui ouvre le jeu sait qu'en principe il peut gagner à coup sûr, mais il ignore comment. Si, malgré cela, le second joueur trouve cette dissymétrie injuste, il est toujours possible de parfaire Hex en ajoutant une règle : après le premier coup, le deuxième joueur peut décider de remplacer le premier pion par l'un des siens au lieu d'occuper une cellule libre. De cette façon, le premier joueur a à déposer un pion sur le jeu ne sait pas d'avance s'il conservera son avantage théorique.

Analyser à fond Hex occuperait ces colonnes pendant cinq ans. Aussi, vais-je me limiter à deux aspects supplémentaires. Le premier est qu'il n'est pas nécessaire qu'une cellule soit occupée pour qu'elle joue un rôle stratégique. La figure 2a illustre un pont où deux pions bleus, qui ne se touchent pas, sont séparés par deux cellules vides. Aussi longtemps qu'aucune des cellules intermédiaires n'est occupée par un pion rouge, les pions bleus sont déjà quasiment reliés. En effet, si le joueur qui joue les rouges fait une tentative et occupe une des deux cases vides intermédiaires, son adversaire n'a qu'à occuper l'autre pour établir la liaison. Les joueurs d'Hex essaient souvent de construire de tels ponts. Ces derniers n'ont pourtant rien d'imparable. Un pont bleu, par exemple, peut être défait si les rouges parviennent à occuper l'une quelconque des cellules intermédiaires par un coup qui déclenche dans le même temps une menace, contre laquelle les bleus devront impérativement réagir. Le mieux est donc d'empêcher votre adversaire de construire trop de ponts.

De surcroît, on doit avoir bien compris que la solidité d'une chaîne se mesure à celle de son maillon le plus faible. Que faire si votre adversaire peut s'attaquer à votre chaîne avec de grandes chances de succès ? Le plus habile est de renforcer le maillon le plus faible ou d'attaquer l'une des chaînes de votre adversaire. Soyez astucieux et dissimulez vos intentions en vous rapprochant insidieusement du maillon faible de la chaîne de votre adversaire.

Une tactique plus compliquée met en jeu la construction d'échelles, lesquelles



2. La tactique de base au jeu d'Hex consiste à bâtir un pont, c'est-à-dire à disposer d'un bord à l'autre une succession de pions dans une série de cases non adjacentes (A). Plus élaborées sont les constructions d'échelles (B). Dans l'exemple illustré en figure C, le joueur des rouges gagne. Finalement, deux problèmes sont proposés aux lecteurs dans les figures C et D. Le tour est aux rouges. Quel coup leur garantit la victoire ?

se forment lorsque l'un des joueurs tente de créer une connexion à proximité de l'un des côtés. La figure 2b montre un départ d'échelle, alors que c'est aux bleus de jouer. Les bleus n'ont aucune autre option que celle qui consiste à jouer la cellule p , sinon, les rouges gagnent. Les rouges jouent alors q . Si les bleus continuent à tenter d'établir une connexion vers le côté (bleu), les rouges ne peuvent que les bloquer. Deux lignes (une bleue et une rouge) se dessinent parallèlement au bord bleu. Ce faisant, ils progressent vers le bord rouge opposé, et les rouges finissent par gagner. Cet exemple illustre pourquoi on doit anticiper la formation des échelles afin de les bloquer dès qu'elles commencent. Ainsi, si les bleus avaient placé un pion près du bord plus tôt dans le jeu, ils auraient automatiquement gagné la confrontation.

On peut citer d'autres variations sur le jeu d'Hex. La variante en Y, par

exemple, se joue sur un jeu qui a une forme triangulaire, et l'on doit alors relier les trois côtés par une même chaîne. Comme dans le cas du jeu de base (losange 11×11), on ne connaît de stratégie gagnante que pour les jeux n'ayant qu'un petit nombre de cases. Hex peut aussi se jouer sur une sphère pavée d'hexagones et de pentagones (voir la figure 1) ; le gagnant est le premier joueur qui parvient à entourer d'une chaîne une ou plusieurs cellules (vides ou occupées par l'adversaire).

Pour finir, j'ai préparé deux problèmes pour les lecteurs qui veulent poursuivre leur découverte du jeu d'Hex. Le premier est illustré sur la figure 2c ; il provient de l'article original de Hein sur le jeu. Il consiste à trouver quelle case les rouges doivent jouer pour s'assurer la victoire. Si c'est trop facile, en voici un autre (voir la figure 2d) : quel coup est gagnant pour les rouges ?

Réactions

L'article du mois de mai de cette rubrique présentait une élégante surface à seulement un côté et une face, que Monsieur Josiah Manning, de la ville d'Aurora, dans le Montana, m'avait envoyée. Je vous avais demandé si cette surface était topologiquement équivalente à celle d'un ruban de Möbius. André Gramain, de l'Université de Tours, a répondu que le problème est résolu dans son livre *Topology of Surfaces* (BCS Associates, Moscow, Idaho, 1984). Il explique que la surface présentée par Manning est topologiquement équivalente à une bouteille de Klein avec un trou. Pour sa part, un ruban de Möbius est équivalent à un plan projectif avec un trou. La bouteille de Klein et le ruban de Möbius n'étant pas équivalents, les deux surfaces sont topologiquement distinctes.

