

2. LE LAISSER-ALLER TUE UNE ÉCOLE MATHÉMATIQUE

Jamais en mathématiques on ne peut baisser sa garde, car alors l'erreur fond sur vous et vous fait perdre tout crédit. L'école de géométrie algébrique italienne (dont on avait fini par penser qu'elle fournissait simultanément une démonstration d'un résultat et un contre-exemple) est un cas étonnant d'abandon fatal de la rigueur. Le mathématicien David Mumford explique cette histoire étrange :

«Il existe des exemples d'erreurs mathématiques graves du type suivant : une école de mathématiques se détourne du droit chemin, et après avoir donné des preuves rigoureuses se laisse lentement gagner par de mauvaises habitudes, jusqu'à ce que des faussetés évidentes soient publiées. Bien sûr, le reste du monde, après s'être laissé abuser, devient progressivement méfiant, puis finalement met le doigt sur des erreurs dans les textes imprimés par les membres de l'école. Le cas le plus connu de cette situation est celui de l'école italienne de géométrie algébrique, qui produisit d'excellents et profonds résultats pendant 50 ans, mais s'effondra ensuite. Trois noms clefs doivent être cités : Castelnuovo, Enriques et Severi. Castelnuovo le plus ancien était un splendide mathématicien parfaitement rigoureux. Enriques qui vient après lui, autant que je le sache, ne publia jamais rien de faux, quoiqu'il reconnaissait que certaines de ses démonstrations ne traitaient pas vraiment tous les cas possibles. Il avait ses propres critères, mais acceptait volontiers de réexaminer une "démonstration" et de la rendre plus complète. Malheureusement Severi, le troisième, qui était fasciste et possédait un tempérament autoritaire, tua finalement l'école entière, car bien qu'ayant débuté par une série de découvertes brillantes et correctes, il publia dans les années 1930 et 1940 des livres remplis d'erreurs. Le reste du monde devint hésitant sur ce qui avait été vraiment prouvé par toute cette école. Il fallut les efforts de deux grands hommes, Zariski et Weil, pour remettre les choses en ordre.»

1880, le mathématicien Landry montrera que $F_6 = 274177 \times 67280421310721$. On sait aujourd'hui que, de F_5 à F_{30} , tous les F_n sont composés et on conjecture que tous les nombres de la forme $2^{2^n} + 1$ sont composés, sauf les quatre premiers !

Ces erreurs ne sont pas très instructives : une fois repérées, rien n'en découle. Ce n'est pas le cas de celle commise à propos du «petit théorème de Fermat». Ce résultat, énoncé par Fermat en 1640 et démontré par Euler en 1736, indique que si p est un nombre premier, alors pour tout nombre entier a supérieur à 1, le nombre $a^p - a$ est un multiple de p . Ainsi, en particulier, si p est premier, $2^p - 2$ est un multiple de p . Cette affirmation ne doit pas être confondue avec l'affirmation inverse qui est fausse : si $2^p - 2$ est un multiple de p , alors p est premier. Fermat ne commit pas la confusion, pourtant tentante. En effet, les nombres qui font exception, c'est-à-dire qui vérifient que $2^p - 2$ est un multiple de p alors qu'ils sont composés (on les appelle 2-pseudo-premiers) sont très rares. Le plus petit est $341 = 11 \times 13$. En choisissant au hasard un nombre n inférieur à 25 milliards, on constate : (a) que $2^n - 2$ n'est pas multiple de n dans 95,64 pour cent des cas (on sait alors avec certitude qu'il est composé) ; (b) que $2^n - 2$ est multiple de n dans 4,36 pour cent des cas et alors n est un nombre premier dans 99,998 pour cent des cas. Pour un nombre inférieur à 25 milliards, le risque d'établir un diagnostic faux à partir de la croyance (erronée) que « n est premier si et seulement si $2^n - 2$ est multiple de

n » est inférieur à 0,00009 pour cent. La croyance erronée tendait les bras et, en 1886, le mathématicien chinois Li Shan-Lan (1811-1882) a publié ce faux critère. Le plus remarquable est qu'aujourd'hui cette croyance fautive (un peu améliorée pour l'être moins souvent encore) sert de base aux algorithmes probabilistes de test de primalité qui sont utilisés systématiquement en cryptographie. Personne ne commet vraiment d'erreur, cependant c'est bien de la fausse caractérisation qu'est née l'idée des algorithmes probabilistes, si importante aujourd'hui. De l'erreur (contrôlée et consciente), on a tiré une méthode importante et utile.

LES FAUSSES DÉCIMALES DU NOMBRE π

Avant l'ère des ordinateurs, quelques problèmes de calculs ont excité les passions et ont été l'occasion d'erreurs à répétition. Ainsi le calcul à la main des décimales de π a donné lieu à une multitude d'erreurs, dont la plus célèbre laisse des marques aujourd'hui encore.

William Shanks (1812-1882) publie 707 décimales de π en 1874. Au total, il a passé 20 ans de sa vie à mener ce calcul et heureusement... n'a jamais su qu'il était faux à partir de la 527^e décimale. Pendant plus de 50 ans d'ailleurs tout le monde fit confiance au calcul de Shanks. C'est seulement en 1945 que D. Ferguson, travaillant comme Shanks uniquement avec du papier et des crayons, recalcule 539 décimales de π et constate un désaccord avec le calcul de son pré-

décesseur. Le désaccord sera confirmé plus tard, par d'autres calculs utilisant cette fois des machines. Les chiffres faux de Shanks furent utilisés en 1937 pour l'aménagement du Palais de la découverte à Paris. La salle π du Palais vit son plafond décoré par les décimales de Shanks. Les fausses décimales de π restèrent jusqu'en 1949 date à laquelle les bons chiffres furent mis en place. On pourrait croire que depuis les fausses décimales de Shanks ont été oubliées. Ce n'est pas le cas : l'éditeur français Hermann en 2001 vend toujours le merveilleux livre de François Le Lionnais *Les grands courants de la pensée mathématique*, livre qui, page 99, reproduit sans indiquer qu'elles sont fausses, les 707 décimales de Shanks. Ne les apprenez pas par cœur !

L'erreur de Shanks est sans importance matérielle puisque l'on sait bien qu'en physique 40 décimales de π seront toujours suffisantes. Il n'empêche que suite aux erreurs répétées dans la course aux décimales de π (aujourd'hui on en connaît 206 milliards), les règles du jeu sont maintenant qu'un calcul doit être réalisé deux fois par deux méthodes différentes pour être pris en considération. Ici l'erreur a incité à la prudence.

LES MATHÉMATIQUES ERRONÉES DU JEU

Les erreurs mathématiques ne sont pas toujours aussi indolores. On raconte que le Chevalier de Méré (1607-1684), qui était philosophe et curieux des sciences, possédait un goût prononcé pour les jeux de hasard. Il recherchait des règles astucieuses et en tirait des paris qu'il proposait à tous. L'une des règles qu'il inventa consiste à faire rouler quatre dés et à parier à un contre un sur l'apparition d'au moins un 6. La probabilité de perdre est $(5/6)^4 = 625/1296$, soit 48,225 pour cent, ce qui donne donc un léger avantage à celui qui propose le jeu et l'assurance à la longue de gagner... beaucoup d'argent. Méré inventa une autre règle : lancer deux dés 24 fois de suite et parier que le double 6 apparaîtra au moins une fois. Cette fois, le calcul, que nous savons faire aujourd'hui, donne que la probabilité de perdre pour celui qui offre le pari, est $(35/36)^{24} = 50,859$ pour cent (pour que l'avantage soit à celui qui propose le pari, il faudrait changer le 24 en 25). Le Chevalier était donc condamné à la longue à perdre de l'argent avec ce second jeu.

La légende veut que le Chevalier de Méré après avoir gagné une fortune grâce au premier jeu, la perdit en pratiquant le second. Cette erreur d'appréciation et quelques autres du même type eurent des conséquences plus importantes que celles, pécuniaires, que subit le Cheva-

lier de Méré, car elles amenèrent la théorie des probabilités qui naquit, à cette époque, des échanges épistolaires entre Pascal, Fermat et Roberval.

Contrairement aux autres domaines des mathématiques où le plus souvent se tromper ne coûte rien, les erreurs dans le domaine de la combinatoire probabiliste ont des conséquences graves pour celui qui les commet : comme Méré l'a compris à ses dépens, les mathématiques sont parfois une science très concrète ! Aujourd'hui, pour élaborer les tableaux des primes de leurs contrats, les compagnies d'assurances sont encore grandes utilisatrices de la théorie des probabilités (et même de ses aspects les plus subtils) et elles aussi doivent éviter à tout prix les erreurs pour rester à flot.

POINCARÉ S'ACQUITTE DE SON ERREUR

L'erreur mathématique peut ruiner son auteur pour d'autres raisons. On m'a raconté qu'une université américaine avait engagé des poursuites contre l'un de ses enseignants mathématiciens qui avait commis une erreur dans une démonstration faite devant les étudiants. Je ne sais pas si l'histoire est vraie et ce qu'il en a réellement coûté au professeur fautif, mais ce n'est pas la première fois qu'un mathématicien doit payer de sa poche une erreur pour un théorème que pourtant il n'a pas même essayé d'appliquer.

En janvier 1889, les quotidiens parisiens annoncent avec fierté que le jeune mathématicien français Henri Poincaré vient de remporter le prix international de mathématiques que le roi de Suède Oscar II avait organisé pour son soixantième anniversaire. Le prix consiste en une médaille d'or d'une valeur de 1 000 francs accompagnée d'une somme de 2 500 couronnes. Charles Hermite, dans une lettre à Mittag-Leffler qui était chargé de l'organisation du prix, indique que « dans ce travail comme dans presque toutes ses recherches, M. Poincaré montre la voie et donne des indications, mais laisse considérablement à faire pour combler les lacunes ». Pire, quelques mois plus tard, le mathématicien Edward Phragmén, qui devait préparer le manuscrit de Poincaré, découvre des passages gênants dont Poincaré réalise qu'ils remettent en question l'ensemble même du mémoire pour lequel il a remporté le prix du roi Oscar.

Poincaré avait gagné un prix pour un mémoire fautif ! Mittag-Leffler reprit possession des exemplaires imprimés du mémoire et demanda à Poincaré d'en rembourser les frais d'impression. La somme que Poincaré payait ainsi dépassait de 1 000 couronnes le prix qu'il avait reçu... Poincaré retravailla soigneusement son

mémoire, le modifiant, le réorganisant et le complétant. La version finalement publiée en novembre 1890 avait pris sensiblement du volume mais, et c'est là tout le charme de l'histoire, constitue un des textes les plus importants des mathématiques modernes : Poincaré, à propos du *Problème des trois corps*, introduit des idées et des méthodes qui fondent la théorie des systèmes dynamiques chaotiques et mettent en évidence que le déterminisme ne garantit pas la prédictibilité.

Après quelques péripéties, sans doute douloureuses, et, même si cela l'avait plutôt appauvri, Poincaré avait, en fin de

compte, largement mérité son prix : l'erreur de Poincaré fut donc fructueuse. Cette édifiante histoire n'est pas le seul cas d'erreur mathématique cruciale : un peu plus tôt, au XIX^e siècle, une autre faute commise par un grand mathématicien avait déjà été à l'origine de progrès et d'éclaircissements en analyse.

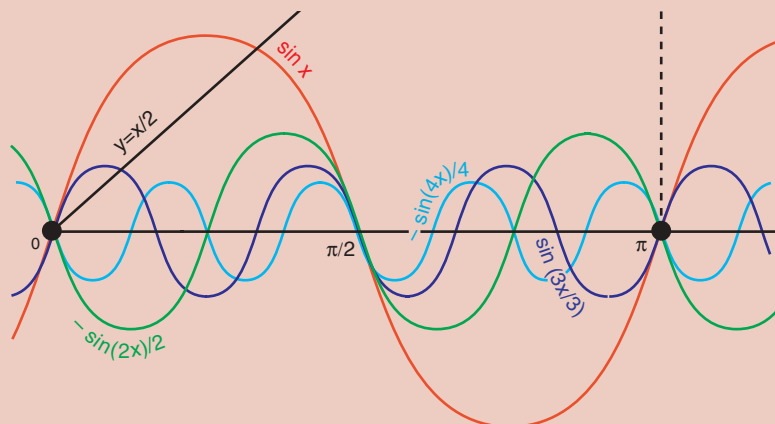
MÊME LE PLUS RIGOUREUX...

Cette erreur fut commise par un des plus grands mathématiciens du XIX^e siècle, Augustin Cauchy (1789-1857), et dans l'un

3. LA CONVERGENCE UNIFORME

Dans son *Cours d'analyse algébrique* de 1821, Louis Augustin Cauchy (1789-1857) affirme et « démontre » que la somme d'une série de fonctions continues est continue. Dans une lettre de 1826, Abel propose à Cauchy le contre-exemple :

$$\sin(x) - \sin(2x)/2 + \sin(3x)/3 - \sin(4x)/4 + \dots$$



La somme de cette série est la fonction qui vaut $x/2$ pour $0 < x < \pi$ et 0 en π (cette somme n'est pas continue en π). Bien qu'averti par la lettre d'Abel et bien qu'Abel ait publié son contre-exemple, Cauchy en 1833 répète dans un article son théorème inexact. Chose étrange aussi, dans l'article même où il donne son contre-exemple, Abel énonce à son tour un théorème faux sur la convergence des séries. Nous sommes dans une période de mise au point des concepts...

Le contre-exemple le plus simple montrant qu'une suite de fonctions continues n'a pas nécessairement une limite continue est le suivant :

$f_n(x) = a - nx$ si $0 \leq x \leq a/n$ et $f_n(x) = 0$ si $a/n < x \leq 1$, dont la limite est la fonction f définie par $f(0) = a$ et $f(x) = 0$ pour $0 < x \leq 1$



Pour qu'une limite de fonctions continues sur E soit continue, il faut non seulement demander que, en chaque point x de E , $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$ (convergence ponctuelle), mais, ce qui est plus fort, que $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \text{ dans } E} (|f_n(x) - f(x)|) = 0$ (convergence uniforme). L'erreur de Cauchy permet de distinguer entre deux types de convergence pour les fonctions. Elle conduit à un progrès mathématique.