

lier de Méré, car elles amenèrent la théorie des probabilités qui naquit, à cette époque, des échanges épistolaires entre Pascal, Fermat et Roberval.

Contrairement aux autres domaines des mathématiques où le plus souvent se tromper ne coûte rien, les erreurs dans le domaine de la combinatoire probabiliste ont des conséquences graves pour celui qui les commet : comme Méré l'a compris à ses dépens, les mathématiques sont parfois une science très concrète ! Aujourd'hui, pour élaborer les tableaux des primes de leurs contrats, les compagnies d'assurances sont encore grandes utilisatrices de la théorie des probabilités (et même de ses aspects les plus subtils) et elles aussi doivent éviter à tout prix les erreurs pour rester à flot.

POINCARÉ S'ACQUITTE DE SON ERREUR

L'erreur mathématique peut ruiner son auteur pour d'autres raisons. On m'a raconté qu'une université américaine avait engagé des poursuites contre l'un de ses enseignants mathématiciens qui avait commis une erreur dans une démonstration faite devant les étudiants. Je ne sais pas si l'histoire est vraie et ce qu'il en a réellement coûté au professeur fautif, mais ce n'est pas la première fois qu'un mathématicien doit payer de sa poche une erreur pour un théorème que pourtant il n'a pas même essayé d'appliquer.

En janvier 1889, les quotidiens parisiens annoncent avec fierté que le jeune mathématicien français Henri Poincaré vient de remporter le prix international de mathématiques que le roi de Suède Oscar II avait organisé pour son soixantième anniversaire. Le prix consiste en une médaille d'or d'une valeur de 1 000 francs accompagnée d'une somme de 2 500 couronnes. Charles Hermite, dans une lettre à Mittag-Leffler qui était chargé de l'organisation du prix, indique que « dans ce travail comme dans presque toutes ses recherches, M. Poincaré montre la voie et donne des indications, mais laisse considérablement à faire pour combler les lacunes ». Pire, quelques mois plus tard, le mathématicien Edward Phragmén, qui devait préparer le manuscrit de Poincaré, découvre des passages gênants dont Poincaré réalise qu'ils remettent en question l'ensemble même du mémoire pour lequel il a remporté le prix du roi Oscar.

Poincaré avait gagné un prix pour un mémoire fautif ! Mittag-Leffler reprit possession des exemplaires imprimés du mémoire et demanda à Poincaré d'en rembourser les frais d'impression. La somme que Poincaré payait ainsi dépassait de 1 000 couronnes le prix qu'il avait reçu... Poincaré retravailla soigneusement son

mémoire, le modifiant, le réorganisant et le complétant. La version finalement publiée en novembre 1890 avait pris sensiblement du volume mais, et c'est là tout le charme de l'histoire, constitue un des textes les plus importants des mathématiques modernes : Poincaré, à propos du *Problème des trois corps*, introduit des idées et des méthodes qui fondent la théorie des systèmes dynamiques chaotiques et mettent en évidence que le déterminisme ne garantit pas la prédictibilité.

Après quelques péripéties, sans doute douloureuses, et, même si cela l'avait plutôt appauvri, Poincaré avait, en fin de

compte, largement mérité son prix : l'erreur de Poincaré fut donc fructueuse. Cette édifiante histoire n'est pas le seul cas d'erreur mathématique cruciale : un peu plus tôt, au XIX^e siècle, une autre faute commise par un grand mathématicien avait déjà été à l'origine de progrès et d'éclaircissements en analyse.

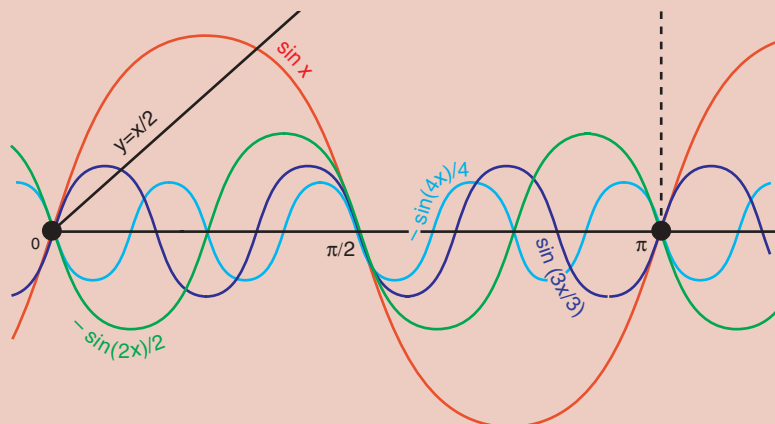
MÊME LE PLUS RIGOUREUX...

Cette erreur fut commise par un des plus grands mathématiciens du XIX^e siècle, Augustin Cauchy (1789-1857), et dans l'un

3. LA CONVERGENCE UNIFORME

Dans son *Cours d'analyse algébrique* de 1821, Louis Augustin Cauchy (1789-1857) affirme et « démontre » que la somme d'une série de fonctions continues est continue. Dans une lettre de 1826, Abel propose à Cauchy le contre-exemple :

$$\sin(x) - \sin(2x)/2 + \sin(3x)/3 - \sin(4x)/4 + \dots$$



La somme de cette série est la fonction qui vaut $x/2$ pour $0 \leq x < \pi$ et 0 en π (cette somme n'est pas continue en π). Bien qu'averti par la lettre d'Abel et bien qu'Abel ait publié son contre-exemple, Cauchy en 1833 répète dans un article son théorème inexact. Chose étrange aussi, dans l'article même où il donne son contre-exemple, Abel énonce à son tour un théorème faux sur la convergence des séries. Nous sommes dans une période de mise au point des concepts...

Le contre-exemple le plus simple montrant qu'une suite de fonctions continues n'a pas nécessairement une limite continue est le suivant :

$f_n(x) = a - nx$ si $0 \leq x \leq a/n$ et $f_n(x) = 0$ si $a/n < x \leq 1$, dont la limite est la fonction f définie par $f(0) = a$ et $f(x) = 0$ pour $0 < x \leq 1$



Pour qu'une limite de fonctions continues sur E soit continue, il faut non seulement demander que, en chaque point x de E , $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$ (convergence ponctuelle), mais, ce qui est plus fort, que $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \text{ dans } E} (|f_n(x) - f(x)|) = 0$ (convergence uniforme). L'erreur de Cauchy permet de distinguer entre deux types de convergence pour les fonctions. Elle conduit à un progrès mathématique.