

lier de Méré, car elles amenèrent la théorie des probabilités qui naquit, à cette époque, des échanges épistolaires entre Pascal, Fermat et Roberval.

Contrairement aux autres domaines des mathématiques où le plus souvent se tromper ne coûte rien, les erreurs dans le domaine de la combinatoire probabiliste ont des conséquences graves pour celui qui les commet : comme Méré l'a compris à ses dépens, les mathématiques sont parfois une science très concrète ! Aujourd'hui, pour élaborer les tableaux des primes de leurs contrats, les compagnies d'assurances sont encore grandes utilisatrices de la théorie des probabilités (et même de ses aspects les plus subtils) et elles aussi doivent éviter à tout prix les erreurs pour rester à flot.

POINCARÉ S'ACQUITTE DE SON ERREUR

L'erreur mathématique peut ruiner son auteur pour d'autres raisons. On m'a raconté qu'une université américaine avait engagé des poursuites contre l'un de ses enseignants mathématiciens qui avait commis une erreur dans une démonstration faite devant les étudiants. Je ne sais pas si l'histoire est vraie et ce qu'il en a réellement coûté au professeur fautif, mais ce n'est pas la première fois qu'un mathématicien doit payer de sa poche une erreur pour un théorème que pourtant il n'a pas même essayé d'appliquer.

En janvier 1889, les quotidiens parisiens annoncent avec fierté que le jeune mathématicien français Henri Poincaré vient de remporter le prix international de mathématiques que le roi de Suède Oscar II avait organisé pour son soixantième anniversaire. Le prix consiste en une médaille d'or d'une valeur de 1 000 francs accompagnée d'une somme de 2 500 couronnes. Charles Hermite, dans une lettre à Mittag-Leffler qui était chargé de l'organisation du prix, indique que « dans ce travail comme dans presque toutes ses recherches, M. Poincaré montre la voie et donne des indications, mais laisse considérablement à faire pour combler les lacunes ». Pire, quelques mois plus tard, le mathématicien Edward Phragmén, qui devait préparer le manuscrit de Poincaré, découvre des passages gênants dont Poincaré réalise qu'ils remettent en question l'ensemble même du mémoire pour lequel il a remporté le prix du roi Oscar.

Poincaré avait gagné un prix pour un mémoire fautif ! Mittag-Leffler reprit possession des exemplaires imprimés du mémoire et demanda à Poincaré d'en rembourser les frais d'impression. La somme que Poincaré payait ainsi dépassait de 1 000 couronnes le prix qu'il avait reçu... Poincaré retravailla soigneusement son

mémoire, le modifiant, le réorganisant et le complétant. La version finalement publiée en novembre 1890 avait pris sensiblement du volume mais, et c'est là tout le charme de l'histoire, constitue un des textes les plus importants des mathématiques modernes : Poincaré, à propos du *Problème des trois corps*, introduit des idées et des méthodes qui fondent la théorie des systèmes dynamiques chaotiques et mettent en évidence que le déterminisme ne garantit pas la prédictibilité.

Après quelques péripéties, sans doute douloureuses, et, même si cela l'avait plutôt appauvri, Poincaré avait, en fin de

compte, largement mérité son prix : l'erreur de Poincaré fut donc fructueuse. Cette édifiante histoire n'est pas le seul cas d'erreur mathématique cruciale : un peu plus tôt, au XIX^e siècle, une autre faute commise par un grand mathématicien avait déjà été à l'origine de progrès et d'éclaircissements en analyse.

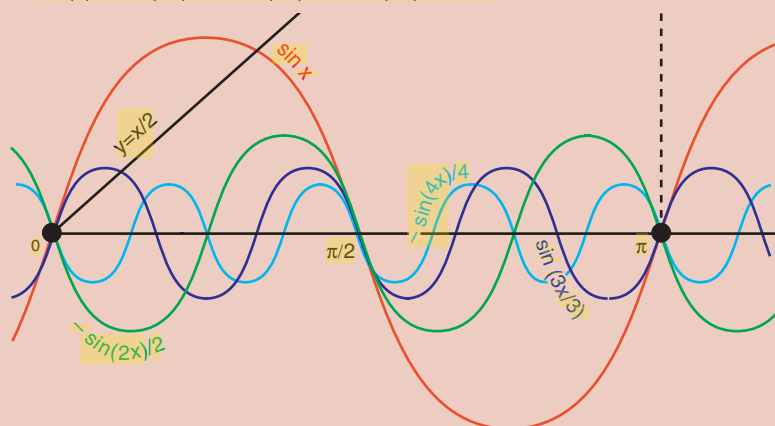
MÊME LE PLUS RIGOUREUX...

Cette erreur fut commise par un des plus grands mathématiciens du XIX^e siècle, Augustin Cauchy (1789-1857), et dans l'un

3. LA CONVERGENCE UNIFORME

Dans son *Cours d'analyse algébrique* de 1821, Louis Augustin Cauchy (1789-1857) affirme et « démontre » que la somme d'une série de fonctions continues est continue. Dans une lettre de 1826, Abel propose à Cauchy le contre-exemple :

$$\sin(x) - \sin(2x)/2 + \sin(3x)/3 - \sin(4x)/4 + \dots$$



La somme de cette série est la fonction qui vaut $x/2$ pour $0 < x < \pi$ et 0 en π (cette somme n'est pas continue en π). Bien qu'averti par la lettre d'Abel et bien qu'Abel ait publié son contre-exemple, Cauchy en 1833 répète dans un article son théorème inexact. Chose étrange aussi, dans l'article même où il donne son contre-exemple, Abel énonce à son tour un théorème faux sur la convergence des séries. Nous sommes dans une période de mise au point des concepts...

Le contre-exemple le plus simple montrant qu'une suite de fonctions continues n'a pas nécessairement une limite continue est le suivant :

$f_n(x) = a - nx$ si $0 \leq x \leq a/n$ et $f_n(x) = 0$ si $a/n < x \leq 1$, dont la limite est la fonction f définie par $f(0) = a$ et $f(x) = 0$ pour $0 < x \leq 1$

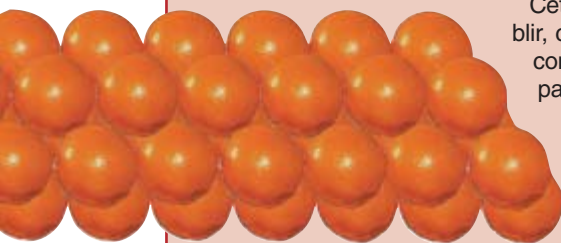


Pour qu'une limite de fonctions continues sur E soit continue, il faut non seulement demander que, en chaque point x de E , $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$ (convergence ponctuelle), mais, ce qui est plus fort, que $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \text{ dans } E} (|f_n(x) - f(x)|) = 0$ (convergence uniforme). L'erreur de Cauchy permet de distinguer entre deux types de convergence pour les fonctions. Elle conduit à un progrès mathématique.

4. LA CONJECTURE DE KEPLER EST-ELLE RÉSOLUE?

La conjecture de Kepler énonce que lorsque vous voulez ranger des sphères, la plus grande densité de rangement est obtenue :

- en composant un réseau triangulaire de sphères sur un même plan ;
- en plaçant sur ce plan un second réseau triangulaire occupant soigneusement un trou sur deux des trous créés par le premier plan ;
- et en recommençant, etc.



Cet énoncé simple est en fait très difficile à établir, car un grand nombre de configurations plus complexes doivent être envisagées et qu'il n'est pas du tout évident que certaines d'entre elles ne sont pas meilleures : toute la difficulté est de proposer un raisonnement qui élimine proprement toutes les autres dispositions.

On considère que la conjecture a été démontrée en 1998 par Thomas Hales de l'Université du Michigan à Ann Harbor. Pour-

tant plusieurs faits troublants liés aux erreurs en mathématiques accompagnent l'histoire de cette démonstration qui pendant un moment encore restera sans doute suspecte. Voici pourquoi.

Un autre mathématicien Wu-Yi Hsiang a prétendu avoir prouvé la conjecture avant T. Hales en 1990. Ce mathématicien n'est pas un amateur puisque W.-Y. Hsiang est titulaire d'un doctorat de l'Université de Princeton et a été professeur à l'Université de Berkeley en Californie, l'une des plus prestigieuses universités des États-Unis. Nous ne sommes pas dans le cas des passionnés aux compétences incertaines qui clament par exemple avoir démontré le théorème de Fermat avant Andrew Wiles et qui refusant de voir que leur preuve est fausse ou incomplète se persuadent qu'ils sont victimes d'une cabale destinée à les déposséder d'un prix et de la gloire que leur génie mérite.

En 1992, l'*Encyclopaedia Britannica* écrivait dans sa mise à jour annuelle que «Sans aucun doute, l'événement mathématique de l'année est la résolution de la conjecture de Kepler par W.-Y. Hsiang.» En 1993, à une réunion de l'*American Mathematical Society*, W.-Y. Hsiang était invité à donner une conférence plénière sur sa démonstration. En 1993, il publiait sa preuve : *On Sphere Packing Problems and the Proof of Kepler Conjecture* dans l'*International Journal of Mathematics*.

On aurait pu croire que l'affaire était réglée. Pourtant des voix s'élevèrent alors pour contester la preuve de W.-Y. Hsiang. Dans la seconde édition de leur livre *Sphere Packing, Lattices and Groups* paru en 1993, J. Conway et N. Sloane qui sont d'éminents mathématiciens spécialistes de ces questions de géométrie indiquent que «des insuffisances persistent dans la preuve de W.-Y. Hsiang, et donc, la question de la conjecture de Kepler ne peut pas être considérée comme réglée». En 1994, un article de T. Hales fut publié par la revue la plus lue par la communauté mathématique *The Mathematical Intelligencer*. Cet article intitulé «Le statut de la conjecture de Kepler» était entièrement consacré à dénoncer les insuffisances de la preuve de W.-Y. Hsiang. L'année suivante, W.-Y. Hsiang publia un article réponse, mais semble-t-il, la communauté des spécialistes était tombée d'accord pour juger sa démonstration définitivement insatisfaisante. Après avoir été acceptée et même acclamée, la démonstration de W.-Y. Hsiang était condamnée, «faute de preuve». Les reproches qu'on lui fait sont graves : dans sa preuve, il admet implicitement certains résultats aussi difficiles à prouver que la conjecture elle-même.

La démonstration proposée finalement par T. Hales en 1998, – qui avait dénoncé les insuffisances de la preuve de W.-Y. Hsiang – est fondée sur des idées assez différentes et a nécessité pour certaines de ses parties l'utilisation d'ordinateurs. Aujourd'hui, malgré l'avis de J. Conway qui a indiqué que «la preuve de T. Hales semblait bonne», certains hésitent à considérer que l'affaire de la conjecture de Kepler est définitivement réglée. Les spécialistes, T. Aste et D. Weaire, affirment prudemment que «d'après la situation en 2000, il apparaît que le crédit de la démonstration de cette conjecture vieille de plusieurs siècles pourrait bien aller à Hales».

Indiquons que la preuve de T. Hales comporte 250 pages et que les logiciels qui l'ont aidé occupent un espace de 3 gigaoctets (soit environ l'équivalent de 3 000 ouvrages de 200 pages). On peut craindre, et même juger certain, que quelque part dans ces logiciels, une erreur au moins se trouve terrée ! Celle-ci ne se reportera pas forcément sur la preuve de T. Hales, mais le risque ne peut être négligé et donc, en attendant des confirmations ou des simplifications qui éviteraient l'utilisation de l'ordinateur, la prudence s'impose.

des plus importants livres qui soit, son cours d'analyse paru en 1826. L'erreur fit naître la notion de convergence uniforme qui joue aujourd'hui un rôle capital dans toute l'analyse. Ce livre prétend, à juste titre, introduire plus de rigueur dans ce domaine en développement accéléré depuis un siècle : «Quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie» écrit Cauchy fier d'avoir su mettre un peu d'ordre dans un domaine bouillonnant, mais parfois incertain ; il critique les méthodes de son prédécesseur Lagrange, et admet à regret que les séries divergentes n'ont pas de somme (plus tard, on saura donner un sens à certaines sommes de séries divergentes ; voir l'article de janvier de cette rubrique). Cauchy énonce des règles de convergence des séries et, en particulier, «le critère de Cauchy». Pourtant dans ce monument de l'histoire des mathématiques, Cauchy y démontre, que si une série de fonctions continues est convergente dans le voisinage d'un point, alors sa somme est une fonction continue dans le même voisinage !

Aujourd'hui cette affirmation vaudrait un zéro pointé à un étudiant de mathématiques, car il est faux en général qu'une limite de fonctions continues le soit. Pour que le résultat devienne vrai, il faut introduire la notion de convergence uniforme : ce n'est pas séparément en chaque point du voisinage autour d'un point x que la convergence doit avoir lieu, mais globalement. Le concept d'uniformité avait échappé à Cauchy.

Dès 1826, le mathématicien norvégien Niels Abel (1808-1829) attira l'attention des autres mathématiciens en proposant un contre-exemple au résultat de Cauchy. Remarquons que la découverte de l'erreur de Cauchy ne vint pas de l'étude de la démonstration, mais de la mise à jour d'un contre-exemple. Cela s'explique par l'état immature de la logique de cette époque : la maturité de la logique ne viendra qu'avec le calcul des quantificateurs et l'extension de la logique aristotélicienne, à la fin du XIX^e siècle. Précisément l'erreur était due à une confusion dans l'ordre des quantificateurs : dire «pour tout a , il existe b tel que $b > a$ » n'équivaut pas à dire «il existe un b tel que pour tout a , $b > a$ ». Outre les conséquences sur l'analyse, l'erreur de Cauchy obligea à un approfondissement des concepts logiques.

Cet exemple prouve que, même le mathématicien le plus soucieux de rigueur et le plus compétent, peut, lors de la naissance d'un domaine mathématique nouveau, se prendre les pieds dans le tapis. Ni l'intuition exceptionnelle d'un génie comme Poincaré ni le souci minutieux de rigueur d'un Cauchy, ne suffisent pour éviter la faute mathématique.