

4. LA CONJECTURE DE KEPLER EST-ELLE RÉSOLUE?

La conjecture de Kepler énonce que lorsque vous voulez ranger des sphères, la plus grande densité de rangement est obtenue :

- en composant un réseau triangulaire de sphères sur un même plan ;
- en plaçant sur ce plan un second réseau triangulaire occupant soigneusement un trou sur deux des trous créés par le premier plan ;
- et en recommençant, etc.

Cet énoncé simple est en fait très difficile à établir, car un grand nombre de configurations plus complexes doivent être envisagées et qu'il n'est pas du tout évident que certaines d'entre elles ne sont pas meilleures : toute la difficulté est de proposer un raisonnement qui élimine proprement toutes les autres dispositions.

On considère que la conjecture a été démontrée en 1998 par Thomas Hales de l'Université du Michigan à Ann Harbor. Pour-

tant plusieurs faits troublants liés aux erreurs en mathématiques accompagnent l'histoire de cette démonstration qui pendant un moment encore restera sans doute suspecte. Voici pourquoi.

Un autre mathématicien Wu-Yi Hsiang a prétendu avoir prouvé la conjecture avant T. Hales en 1990. Ce mathématicien n'est pas un amateur puisque W.-Y. Hsiang est titulaire d'un doctorat de l'Université de Princeton et a été professeur à l'Université de Berkeley en Californie, l'une des plus prestigieuses universités des États-Unis. Nous ne sommes pas dans le cas des passionnés aux compétences incertaines qui clament par exemple avoir démontré le théorème de Fermat avant Andrew Wiles et qui refusant de voir que leur preuve est fausse ou incomplète se persuadent qu'ils sont victimes d'une cabale destinée à les déposséder d'un prix et de la gloire que leur génie mérite.

En 1992, l'*Encyclopaedia Britannica* écrivait dans sa mise à jour annuelle que «Sans aucun doute, l'événement mathématique de l'année est la résolution de la conjecture de Kepler par W.-Y. Hsiang.» En 1993, à une réunion de l'*American Mathematical Society*, W.-Y. Hsiang était invité à donner une conférence plénière sur sa démonstration. En 1993, il publiait sa preuve : *On Sphere Packing Problems and the Proof of Kepler Conjecture* dans l'*International Journal of Mathematics*.

On aurait pu croire que l'affaire était réglée. Pourtant des voix s'élevèrent alors pour contester la preuve de W.-Y. Hsiang. Dans la seconde édition de leur livre *Sphere Packing, Lattices and Groups* paru en 1993, J. Conway et N. Sloane qui sont d'éminents mathématiciens spécialistes de ces questions de géométrie indiquent que «des insuffisances persistent dans la preuve de W.-Y. Hsiang, et donc, la question de la conjecture de Kepler ne peut pas être considérée comme réglée». En 1994, un article de T. Hales fut publié par la revue la plus lue par la communauté mathématique *The Mathematical Intelligencer*. Cet article intitulé «Le statut de la conjecture de Kepler» était entièrement consacré à dénoncer les insuffisances de la preuve de W.-Y. Hsiang. L'année suivante, W.-Y. Hsiang publia un article réponse, mais semble-t-il, la communauté des spécialistes était tombée d'accord pour juger sa démonstration définitivement insatisfaisante. Après avoir été acceptée et même acclamée, la démonstration de W.-Y. Hsiang était condamnée, «faute de preuve». Les reproches qu'on lui fait sont graves : dans sa preuve, il admet implicitement certains résultats aussi difficiles à prouver que la conjecture elle-même.

La démonstration proposée finalement par T. Hales en 1998, – qui avait dénoncé les insuffisances de la preuve de W.-Y. Hsiang – est fondée sur des idées assez différentes et a nécessité pour certaines de ses parties l'utilisation d'ordinateurs. Aujourd'hui, malgré l'avis de J. Conway qui a indiqué que «la preuve de T. Hales semblait bonne», certains hésitent à considérer que l'affaire de la conjecture de Kepler est définitivement réglée. Les spécialistes, T. Aste et D. Weaire, affirment prudemment que «d'après la situation en 2000, il apparaît que le crédit de la démonstration de cette conjecture vieille de plusieurs siècles pourrait bien aller à Hales».

Indiquons que la preuve de T. Hales comporte 250 pages et que les logiciels qui l'ont aidé occupent un espace de 3 gigaoctets (soit environ l'équivalent de 3 000 ouvrages de 200 pages). On peut craindre, et même juger certain, que quelque part dans ces logiciels, une erreur au moins se trouve terrée ! Celle-ci ne se reportera pas forcément sur la preuve de T. Hales, mais le risque ne peut être négligé et donc, en attendant des confirmations ou des simplifications qui éviteraient l'utilisation de l'ordinateur, la prudence s'impose.

des plus importants livres qui soit, son cours d'analyse paru en 1826. L'erreur fit naître la notion de convergence uniforme qui joue aujourd'hui un rôle capital dans toute l'analyse. Ce livre prétend, à juste titre, introduire plus de rigueur dans ce domaine en développement accéléré depuis un siècle : «Quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie» écrit Cauchy fier d'avoir su mettre un peu d'ordre dans un domaine bouillonnant, mais parfois incertain ; il critique les méthodes de son prédécesseur Lagrange, et admet à regret que les séries divergentes n'ont pas de somme (plus tard, on saura donner un sens à certaines sommes de séries divergentes ; voir l'article de janvier de cette rubrique). Cauchy énonce des règles de convergence des séries et, en particulier, «le critère de Cauchy». Pourtant dans ce monument de l'histoire des mathématiques, Cauchy y démontre, que si une série de fonctions continues est convergente dans le voisinage d'un point, alors sa somme est une fonction continue dans le même voisinage !

Aujourd'hui cette affirmation vaudrait un zéro pointé à un étudiant de mathématiques, car il est faux en général qu'une limite de fonctions continues le soit. Pour que le résultat devienne vrai, il faut introduire la notion de convergence uniforme : ce n'est pas séparément en chaque point du voisinage autour d'un point x que la convergence doit avoir lieu, mais globalement. Le concept d'uniformité avait échappé à Cauchy.

Dès 1826, le mathématicien norvégien Niels Abel (1808-1829) attira l'attention des autres mathématiciens en proposant un contre-exemple au résultat de Cauchy. Remarquons que la découverte de l'erreur de Cauchy ne vint pas de l'étude de la démonstration, mais de la mise à jour d'un contre-exemple. Cela s'explique par l'état immature de la logique de cette époque : la maturité de la logique ne viendra qu'avec le calcul des quantificateurs et l'extension de la logique aristotélicienne, à la fin du XIX^e siècle. Précisément l'erreur était due à une confusion dans l'ordre des quantificateurs : dire «pour tout a , il existe b tel que $b > a$ » n'équivaut pas à dire «il existe un b tel que pour tout a , $b > a$ ». Outre les conséquences sur l'analyse, l'erreur de Cauchy obligea à un approfondissement des concepts logiques.

Cet exemple prouve que, même le mathématicien le plus soucieux de rigueur et le plus compétent, peut, lors de la naissance d'un domaine mathématique nouveau, se prendre les pieds dans le tapis. Ni l'intuition exceptionnelle d'un génie comme Poincaré ni le souci minutieux de rigueur d'un Cauchy, ne suffisent pour éviter la faute mathématique.