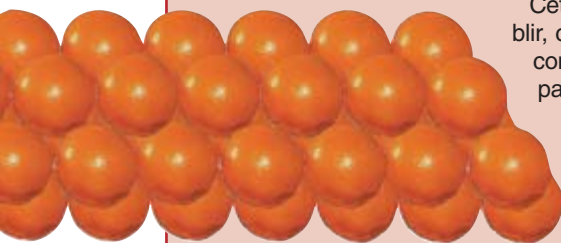


4. LA CONJECTURE DE KEPLER EST-ELLE RÉSOLUE?

La conjecture de Kepler énonce que lorsque vous voulez ranger des sphères, la plus grande densité de rangement est obtenue :

- en composant un réseau triangulaire de sphères sur un même plan ;
- en plaçant sur ce plan un second réseau triangulaire occupant soigneusement un trou sur deux des trous créés par le premier plan ;
- et en recommençant, etc.



Cet énoncé simple est en fait très difficile à établir, car un grand nombre de configurations plus complexes doivent être envisagées et qu'il n'est pas du tout évident que certaines d'entre elles ne sont pas meilleures : toute la difficulté est de proposer un raisonnement qui élimine proprement toutes les autres dispositions.

On considère que la conjecture a été démontrée en 1998 par Thomas Hales de l'Université du Michigan à Ann Harbor. Pour-

tant plusieurs faits troublants liés aux erreurs en mathématiques accompagnent l'histoire de cette démonstration qui pendant un moment encore restera sans doute suspecte. Voici pourquoi.

Un autre mathématicien Wu-Yi Hsiang a prétendu avoir prouvé la conjecture avant T. Hales en 1990. Ce mathématicien n'est pas un amateur puisque W.-Y. Hsiang est titulaire d'un doctorat de l'Université de Princeton et a été professeur à l'Université de Berkeley en Californie, l'une des plus prestigieuses universités des États-Unis. Nous ne sommes pas dans le cas des passionnés aux compétences incertaines qui clament par exemple avoir démontré le théorème de Fermat avant Andrew Wiles et qui refusant de voir que leur preuve est fausse ou incomplète se persuadent qu'ils sont victimes d'une cabale destinée à les déposséder d'un prix et de la gloire que leur génie mérite.

En 1992, l'*Encyclopaedia Britannica* écrivait dans sa mise à jour annuelle que «Sans aucun doute, l'événement mathématique de l'année est la résolution de la conjecture de Kepler par W.-Y. Hsiang.» En 1993, à une réunion de l'*American Mathematical Society*, W.-Y. Hsiang était invité à donner une conférence plénière sur sa démonstration. En 1993, il publiait sa preuve : *On Sphere Packing Problems and the Proof of Kepler Conjecture* dans l'*International Journal of Mathematics*.

On aurait pu croire que l'affaire était réglée. Pourtant des voix s'élevèrent alors pour contester la preuve de W.-Y. Hsiang. Dans la seconde édition de leur livre *Sphere Packing, Lattices and Groups* paru en 1993, J. Conway et N. Sloane qui sont d'éminents mathématiciens spécialistes de ces questions de géométrie indiquent que «des insuffisances persistent dans la preuve de W.-Y. Hsiang, et donc, la question de la conjecture de Kepler ne peut pas être considérée comme réglée». En 1994, un article de T. Hales fut publié par la revue la plus lue par la communauté mathématique *The Mathematical Intelligencer*. Cet article intitulé «Le statut de la conjecture de Kepler» était entièrement consacré à dénoncer les insuffisances de la preuve de W.-Y. Hsiang. L'année suivante, W.-Y. Hsiang publia un article réponse, mais semble-t-il, la communauté des spécialistes était tombée d'accord pour juger sa démonstration définitivement insatisfaisante. Après avoir été acceptée et même acclamée, la démonstration de W.-Y. Hsiang était condamnée, «faute de preuve». Les reproches qu'on lui fait sont graves : dans sa preuve, il admet implicitement certains résultats aussi difficiles à prouver que la conjecture elle-même.

La démonstration proposée finalement par T. Hales en 1998, – qui avait dénoncé les insuffisances de la preuve de W.-Y. Hsiang – est fondée sur des idées assez différentes et a nécessité pour certaines de ses parties l'utilisation d'ordinateurs. Aujourd'hui, malgré l'avis de J. Conway qui a indiqué que «la preuve de T. Hales semblait bonne», certains hésitent à considérer que l'affaire de la conjecture de Kepler est définitivement réglée. Les spécialistes, T. Aste et D. Weaire, affirment prudemment que «d'après la situation en 2000, il apparaît que le crédit de la démonstration de cette conjecture vieille de plusieurs siècles pourrait bien aller à Hales».

Indiquons que la preuve de T. Hales comporte 250 pages et que les logiciels qui l'ont aidé occupent un espace de 3 gigaoctets (soit environ l'équivalent de 3 000 ouvrages de 200 pages). On peut craindre, et même juger certain, que quelque part dans ces logiciels, une erreur au moins se trouve terrée ! Celle-ci ne se reportera pas forcément sur la preuve de T. Hales, mais le risque ne peut être négligé et donc, en attendant des confirmations ou des simplifications qui éviteraient l'utilisation de l'ordinateur, la prudence s'impose.

des plus importants livres qui soit, son cours d'analyse paru en 1826. L'erreur fit naître la notion de convergence uniforme qui joue aujourd'hui un rôle capital dans toute l'analyse. Ce livre prétend, à juste titre, introduire plus de rigueur dans ce domaine en développement accéléré depuis un siècle : «Quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie» écrit Cauchy fier d'avoir su mettre un peu d'ordre dans un domaine bouillonnant, mais parfois incertain ; il critique les méthodes de son prédécesseur Lagrange, et admet à regret que les séries divergentes n'ont pas de somme (plus tard, on saura donner un sens à certaines sommes de séries divergentes ; voir l'article de janvier de cette rubrique). Cauchy énonce des règles de convergence des séries et, en particulier, «le critère de Cauchy». Pourtant dans ce monument de l'histoire des mathématiques, Cauchy y démontre, que si une série de fonctions continues est convergente dans le voisinage d'un point, alors sa somme est une fonction continue dans le même voisinage !

Aujourd'hui cette affirmation vaudrait un zéro pointé à un étudiant de mathématiques, car il est faux en général qu'une limite de fonctions continues le soit. Pour que le résultat devienne vrai, il faut introduire la notion de convergence uniforme : ce n'est pas séparément en chaque point du voisinage autour d'un point x que la convergence doit avoir lieu, mais globalement. Le concept d'uniformité avait échappé à Cauchy.

Dès 1826, le mathématicien norvégien Niels Abel (1808-1829) attira l'attention des autres mathématiciens en proposant un contre-exemple au résultat de Cauchy. Remarquons que la découverte de l'erreur de Cauchy ne vint pas de l'étude de la démonstration, mais de la mise à jour d'un contre-exemple. Cela s'explique par l'état immature de la logique de cette époque : la maturité de la logique ne viendra qu'avec le calcul des quantificateurs et l'extension de la logique aristotélicienne, à la fin du XIX^e siècle. Précisément l'erreur était due à une confusion dans l'ordre des quantificateurs : dire «pour tout a , il existe b tel que $b > a$ » n'équivaut pas à dire «il existe un b tel que pour tout a , $b > a$ ». Outre les conséquences sur l'analyse, l'erreur de Cauchy obligea à un approfondissement des concepts logiques.

Cet exemple prouve que, même le mathématicien le plus soucieux de rigueur et le plus compétent, peut, lors de la naissance d'un domaine mathématique nouveau, se prendre les pieds dans le tapis. Ni l'intuition exceptionnelle d'un génie comme Poincaré ni le souci minutieux de rigueur d'un Cauchy, ne suffisent pour éviter la faute mathématique.

UNE ÉPISTÉMOLOGIE DE L'ERREUR

Bien d'autres exemples d'erreurs commises par de grands mathématiciens peuvent être cités, si bien d'ailleurs que certains philosophes des mathématiques ont proposé l'idée que le développement mathématique se fait grâce aux erreurs commises puis corrigées. C'est en effet la thèse soutenue par le philosophe Imre Lakatos, disciple de Karl Popper, dont la position appelée parfois *faillibilisme* peut être résumée ainsi :

- l'erreur est une caractéristique essentielle de la connaissance mathématique qui, contrairement à ce que soutiennent les *infaillibilistes*, ne progresse pas par une simple accumulation continue de vérités ;
- les théories mathématiques sont empiriques, c'est-à-dire confrontées aux expériences que constituent contre-exemples et calculs ; comme les physiciens, les mathématiciens passent d'une théorie à une autre sans que jamais aucune ne puisse être considérée comme ultime.

Les principaux exemples sur lesquels Lakatos appuie sa thèse sont celui de la convergence uniforme et celui de la formule d'Euler qui lie les nombres associés à un polyèdre. Cette formule donna lieu à toute une série d'énoncés faux pendant plus d'un siècle (car utilisant des définitions inappropriées de la notion de polyèdre).

Cependant pour la grande majorité des mathématiciens, l'épistémologie faillibiliste n'est adaptée qu'à la description des périodes courtes de l'histoire des mathématiques où une théorie élabore ses concepts et ses méthodes de preuve. Cela s'est produit pour l'analyse et la topologie au XIX^e siècle (d'où l'exemple de Cauchy et celui de la formule d'Euler), mais ne se produit plus aujourd'hui depuis la mise au point de la logique du calcul des prédicats et la formulation de cadres formels généraux qui sont aptes à la représentation de toutes les mathématiques.

Depuis l'invention du formalisme ensembliste au début du XX^e siècle, les erreurs qu'on rencontre en mathématiques ne sont non plus dues à des théories fausses ou à des concepts en cours d'élaboration, mais de «vraies belles erreurs» dues à l'étourderie, la paresse de donner tous les détails, la complication d'une situation, l'insuffisance des contrôles.

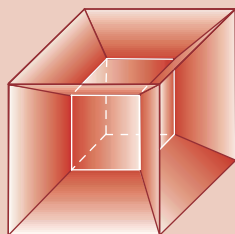
Non, les mathématiques ne sont pas comme la physique, soutiennent la majorité des mathématiciens et ce qui a été démontré avec soin il y a 100 ans ou 2 000 ans reste vrai et le restera. Le mathématicien John Conway précise : «Il est trompeur de considérer l'exemple de la formule d'Euler comme caractéristique du développement des mathématiques. La plu-

5. LA FORMULE D'EULER ET LA THÈSE FAILLIBILISTE

Imre Lakatos (1922-1974) s'est servi de l'exemple de la formule d'Euler pour expliquer sa conception faillibiliste des mathématiques : les mathématiques progressent par corrections d'erreurs. La formule d'Euler (énoncée en 1750) indique que pour tout polyèdre donné, si on désigne par S le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes et F le nombre de faces alors :

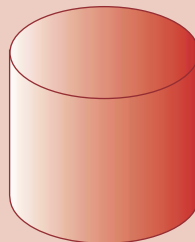
$$F - A + S = 2 \quad (\text{pour le cube on a } S = 8, A = 12, F = 6).$$

L'énoncé semble juste, pourtant des contre-exemples existent :

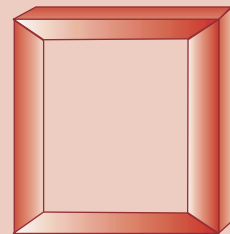


$$12 - 24 + 16 = 4$$

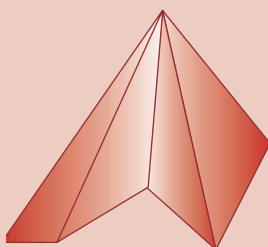
Faces - Arêtes + Sommets



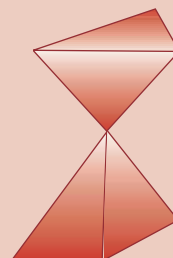
$$3 - 2 + 0 = 1$$



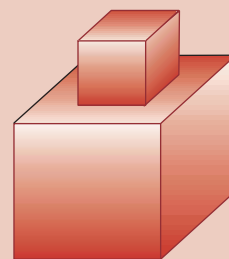
$$12 - 24 + 12 = 0$$



$$8 - 11 + 6 = 3$$



$$8 - 12 + 7 = 3$$



$$11 - 24 + 16 = 3$$

Comme Euler n'avait pas donné de définition précise de ce qu'il appelait polyèdre, les contre-exemples amènent à en rechercher une qui exclurait le contre-exemple. C'est seulement en 1895 que Poincaré proposera une définition convenable après que de nombreuses tentatives imparfaites amènent une succession d'énoncés faux, rectifiés par d'autres énoncés faux. Ces contre-exemples provoquant un processus d'ajustements successifs sont vus par Lakatos comme une caractéristique du développement mathématique. Ce point de vue n'est guère partagé aujourd'hui où on considère que seules les périodes de mise au point de nouveaux domaines (ici la topologie) sont sujettes à ce type d'hésitation.

part des résultats mathématiques une fois prouvés le restent définitivement. Si la preuve originale ne satisfait plus tout à fait les critères de rigueur adoptés ensuite, les adapter est en général facile. Bien souvent, il y a eu des omissions importantes ou des erreurs dans les premières tentatives de preuve de résultats importants, mais elles sont vite corrigées, et au total il existe très peu de cas analogues à la formule d'Euler.»

ENSEMBLE TOUT S'ARRANGE !

Finalement, si l'on est étonné du nombre important d'erreurs commises par chaque mathématicien et par la gravité de certaines d'entre elles, jusqu'à présent, jamais un théorème faux et important n'est passé inaperçu longtemps ou n'a été utilisé comme base pour formuler et développer une théorie fautive qui aurait berné toute la communauté. Collectivement les mathématiciens ne semblent pas être faillibles.

L'image d'une science qui, en dehors de quelques périodes courtes, progresse continuellement et sans remise en cause profonde est pour l'essentiel confirmée par l'examen des faits historiques. L'erreur est fréquente et gênante, mais aussi fructueuse et stimulante et en définitive toujours rapidement effacée.

U. BOTTAZZINI, *Poincaré, philosophe et mathématicien*, Collection Les génies de la science, Pour la Science, 2000.

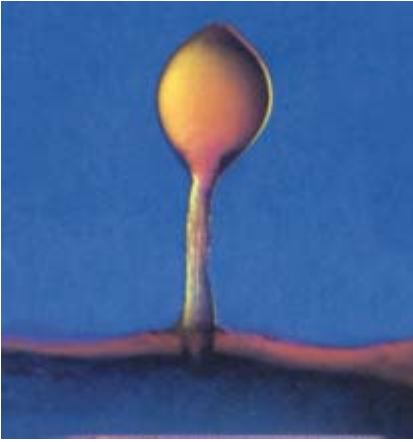
T. C. HALES, *The Kepler Conjecture*. <http://www.math.lsa.umich.edu/~hales/countdown/>

J. HERBRAND, *Écrits logiques*, Presses Universitaires de France, Paris, 1968.

W.-Y. HSIANG, *A Rejoinder to Hales's Article*, in *Math. Intel.* 17, 35-42, 1995.

C. PÖPPE, *La conjecture de Kepler*, in *Pour la Science*, n° 259, mai 1999.

I. LAKATOS, *Preuves et réfutations*, Essai sur la logique de la découverte mathématique, Hermann, Paris, 1984.



Le fond et l'informe

IAN STEWART

Les mathématiques modifient notre perception du monde animal, des micro-organismes aux tigres en passant par les poissons.

Lors d'un colloque sur les mathématiques de la genèse des formes, et notamment lors d'une des conférences, un de mes animaux favoris me revint à la mémoire. Mon préféré est le tigre pour sa magnifique fourrure rayée, mais l'autre, s'il n'a pas l'élégance d'un félin, a pourtant une apparence remarquable : il s'agit d'une moisissure visqueuse de l'embranchement des acrasiomycètes, nommée *Dictyostelium discoideum*.

Ces organismes fascinent les biologistes, car ils sont à la frontière entre les animaux unicellulaires et pluricellulaires. Ils illustrent également une vérité que les nouveaux explorateurs du génome se doivent de garder en mémoire : ce ne

sont pas seulement les gènes qui importent, mais ce que l'on en fait.

Malgré son humble position dans l'arbre des espèces, *Dictyostelium discoideum* rivalise avec les animaux dits supérieurs par les belles structures spiralées qu'il crée (voir la figure 2). Dans quelle mesure ces formes sont-elles inscrites dans les gènes ? Y a-t-il un gène des spirales ? À l'inverse, doit-on voir dans ces formes le résultat de lois physiques et d'équations mathématiques ?

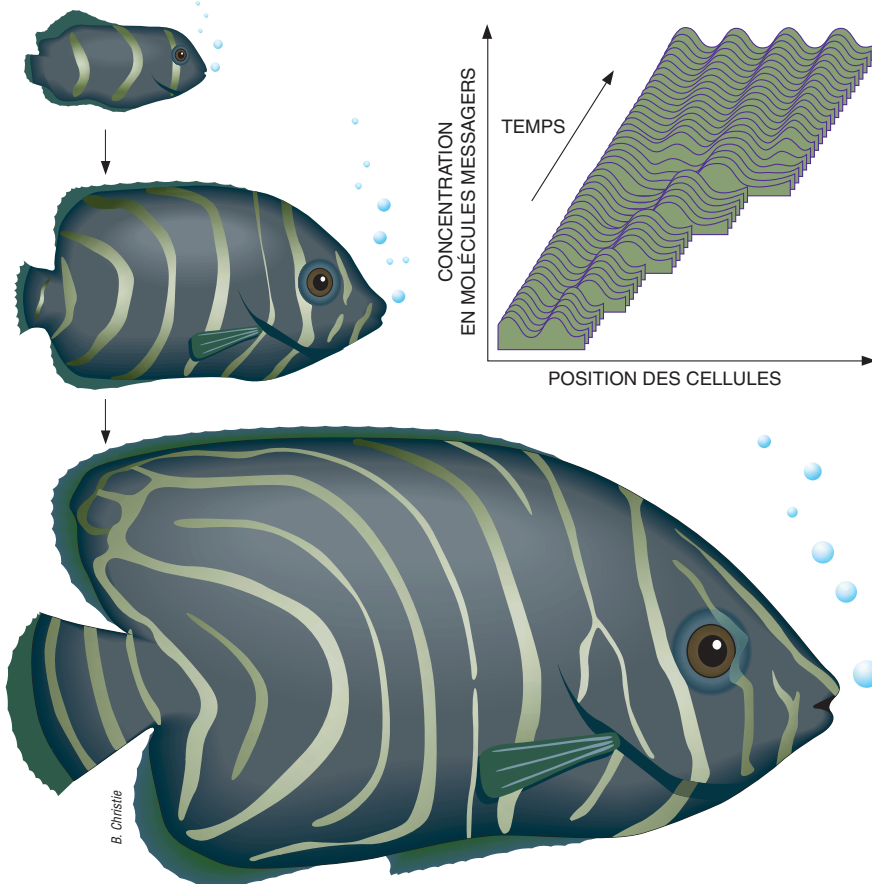
Afin de répondre à ces questions, examinons le cycle de vie de *Dictyostelium discoideum*. Ces organismes sont issus de spores transportées par le vent en un lieu propice, humide et riche en nour-

riture (principalement des bactéries et des levures qu'ils phagocytent). Les spores germent et donnent naissance à des cellules, semblables à des amibes, qui partent en quête de nourriture. Lorsque ces cellules sont suffisamment grosses, elles se reproduisent en se divisant en deux cellules identiques. Quand la nourriture abonde, elles aussi. Elles conservent un mode de vie autonome : elles ne se préoccupent pas de leurs voisines !

De même que certains artistes ne sont talentueux qu'en période de bohème, l'expression artistique de ces organismes apparaît lorsque la nourriture se raréfie. Dans ces conditions, les cellules sécrètent de l'adénosine monophosphate cyclique (une molécule messager). Attirées vers la source de cette molécule, les autres cellules sécrètent à leur tour de l'adénosine monophosphate cyclique : chaque cellule «clame» sa présence à ses voisines en émettant cette molécule. De ce mouvement de foule naît parfois une élégante spirale. La population devient de plus en plus dense, tandis que la spirale se resserre jusqu'à se transformer en une structure arborescente qui rappelle les racines ou les branches d'un arbre. Ces ramifications s'épaississent et les cellules s'agglutinent. L'ensemble s'entoure alors d'une gaine visqueuse et prend finalement la forme d'une «limace» (à ne pas confondre avec le gastéropode du même nom).

La «limace» est une colonie de cellules autonomes, cependant elle se déplace à la manière d'un organisme pluricellulaire unique. Parvenue dans une zone sèche, la colonie s'ancre solidement au sol, puis certaines des cellules «se sacrifient» et forment une longue tige à l'extrémité de laquelle les autres cellules s'agencent en une masse arrondie, nommée sporocarpe. Les cellules s'y transforment en spores qui, libérées à maturité et transportées par le vent, commencent un nouveau cycle.

Thomas Höfer, biophysicien à l'Université de Berlin, a découvert un système d'équations mathématiques dont les solutions reproduisent les formes spiralées et arborescentes de *Dictyostelium discoideum*. Par ailleurs, Cornelis Weijer, de



1. Le scalaire se pare de nouvelles rayures à mesure qu'il grandit. Dans une simulation sur un ordinateur, les pics des ondes représentent les rayures.