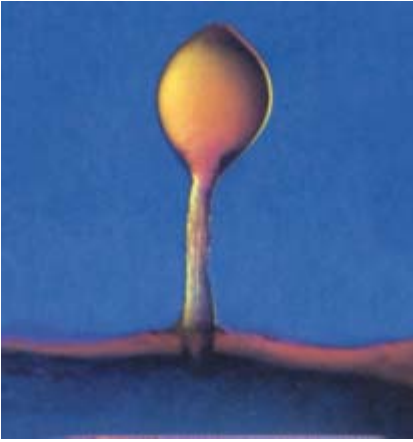




Le fond et l'informe

IAN STEWART

Les mathématiques modifient notre perception du monde animal, des micro-organismes aux tigres en passant par les poissons.

Lors d'un colloque sur les mathématiques de la genèse des formes, et notamment lors d'une des conférences, un de mes animaux favoris me revint à la mémoire. Mon préféré est le tigre pour sa magnifique fourrure rayée, mais l'autre, s'il n'a pas l'élégance d'un félin, a pourtant une apparence remarquable : il s'agit d'une moisissure visqueuse de l'embranchement des acrasiomycètes, nommée *Dictyostelium discoideum*.

Ces organismes fascinent les biologistes, car ils sont à la frontière entre les animaux unicellulaires et pluricellulaires. Ils illustrent également une vérité que les nouveaux explorateurs du génome se doivent de garder en mémoire : ce ne

sont pas seulement les gènes qui importent, mais ce que l'on en fait.

Malgré son humble position dans l'arbre des espèces, *Dictyostelium discoideum* rivalise avec les animaux dits supérieurs par les belles structures spiralées qu'il crée (voir la figure 2). Dans quelle mesure ces formes sont-elles inscrites dans les gènes ? Y a-t-il un gène des spirales ? À l'inverse, doit-on voir dans ces formes le résultat de lois physiques et d'équations mathématiques ?

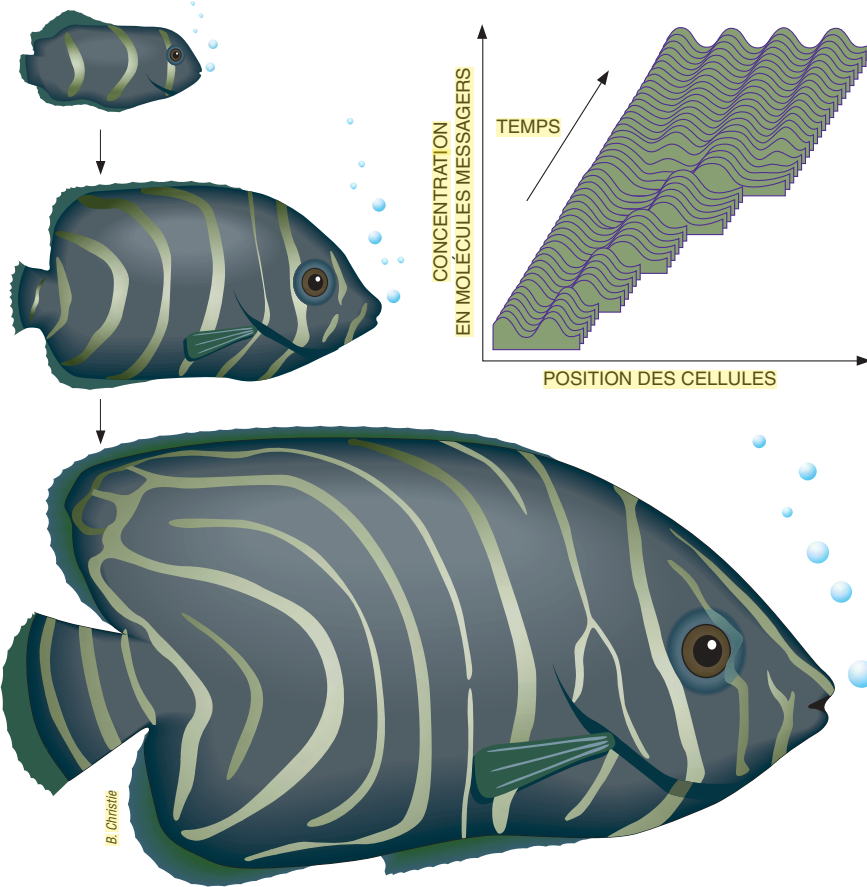
Afin de répondre à ces questions, examinons le cycle de vie de *Dictyostelium discoideum*. Ces organismes sont issus de spores transportées par le vent en un lieu propice, humide et riche en nour-

riture (principalement des bactéries et des levures qu'ils phagocytent). Les spores germent et donnent naissance à des cellules, semblables à des amibes, qui partent en quête de nourriture. Lorsque ces cellules sont suffisamment grosses, elles se reproduisent en se divisant en deux cellules identiques. Quand la nourriture abonde, elles aussi. Elles conservent un mode de vie autonome : elles ne se préoccupent pas de leurs voisines !

De même que certains artistes ne sont talentueux qu'en période de bohème, l'expression artistique de ces organismes apparaît lorsque la nourriture se raréfie. Dans ces conditions, les cellules sécrètent de l'adénosine monophosphate cyclique (une molécule messager). Attirées vers la source de cette molécule, les autres cellules sécrètent à leur tour de l'adénosine monophosphate cyclique : chaque cellule «clame» sa présence à ses voisines en émettant cette molécule. De ce mouvement de foule naît parfois une élégante spirale. La population devient de plus en plus dense, tandis que la spirale se resserre jusqu'à se transformer en une structure arborescente qui rappelle les racines ou les branches d'un arbre. Ces ramifications s'épaississent et les cellules s'agglutinent. L'ensemble s'entoure alors d'une gaine visqueuse et prend finalement la forme d'une «limace» (à ne pas confondre avec le gastéropode du même nom).

La «limace» est une colonie de cellules autonomes, cependant elle se déplace à la manière d'un organisme pluricellulaire unique. Parvenue dans une zone sèche, la colonie s'ancre solidement au sol, puis certaines des cellules «se sacrifient» et forment une longue tige à l'extrémité de laquelle les autres cellules s'agencent en une masse arrondie, nommée sporocarpe. Les cellules s'y transforment en spores qui, libérées à maturité et transportées par le vent, commencent un nouveau cycle.

Thomas Höfer, biophysicien à l'Université de Berlin, a découvert un système d'équations mathématiques dont les solutions reproduisent les formes spiralées et arborescentes de *Dictyostelium discoideum*. Par ailleurs, Cornelis Weijer, de



1. Le scalaire se pare de nouvelles rayures à mesure qu'il grandit. Dans une simulation sur un ordinateur, les pics des ondes représentent les rayures.

l'Université de Dundee, a montré que des équations très similaires modélisent les déplacements de la «limace». Les principaux paramètres qui déterminent la structure sont la densité de la population, la quantité d'adénosine monophosphate cyclique sécrétée et la sensibilité des organismes à cette molécule.

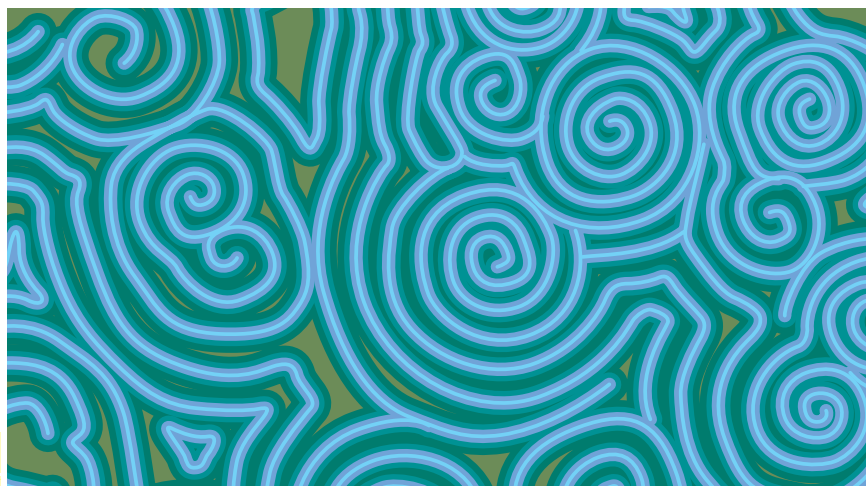
Ainsi, les gènes de *Dictyostelium discoideum*, à l'origine notamment de la synthèse de l'adénosine monophosphate cyclique et des récepteurs de cette molécule, sont responsables du comportement de chaque organisme, mais ne contiennent aucune instruction sur la forme spiralee de la colonie. Cette forme résulte des lois mathématiques auxquelles obéissent ces organismes. En d'autres termes, cette idée, chère à d'Arcy Thompson qui voyait dans la forme de nombreux organismes le résultat de lois physiques, signifie que les mathématiques définissent le cycle vital de *Dictyostelium discoideum* autant que la génétique.

Les équations qui mènent à cette conclusion importante, mais controversée, sont proches de celles établies il y a environ 50 ans par le mathématicien anglais Alan Turing, plus connu comme l'un des pères de l'informatique. Il s'intéressait aussi à la morphogenèse – la formation et la différenciation des tissus et des organes biologiques. En 1952, il a postulé que les structures ordonnées d'êtres vivants n'exigeaient pas de précurseur ordonné. Selon lui, ces structures naissent parfois de substances chimiques, dites morphogènes, qui régissent l'ensemble en diffusant dans les tissus.

Lorsque Turing publie pour la première fois ses idées, elles ne sont que théoriques. Cependant, elles sont bientôt étayées par un saisissant exemple : la réaction chimique de Belousov-Zhabotinsky, du nom de deux chimistes russes, où le simple mélange de quelques substances chimiques usuelles, tels le bromure de sodium, l'acide sulfurique et l'acide malonique, dans une boîte de pétri, fait apparaître des anneaux concentriques et des spirales semblables à celles de *Dictyostelium discoideum*. De telles réactions engendrent des rayures, des taches, des mouchetures et d'autres motifs fréquents dans le monde animal.

Les idées de Turing ont néanmoins été rejetées par les biologistes qui opposaient la dynamique des structures de la réaction de Belousov-Zhabotinsky et de toutes les autres structures de Turing découvertes par les chimistes à la fixité des motifs observés dans le monde animal : il n'y a pas de zèbres à rayures mobiles, ni de léopards à taches mouvantes !

Pourtant Turing a montré que ses équations ont également des solutions stationnaires, mais les chimistes n'en ont



2. Les cellules de la moisissure visqueuse *Dictyostelium discoideum* forment des spirales, comme sur cette vue d'artiste.

jamais obtenues, jusqu'à ce que l'on découvre pourquoi : quand les réactions sont effectuées dans un gel plutôt que dans un liquide, les motifs sont fixes. Or les organismes vivants sont plus proches de gels que de liquides. Toutefois, le temps que ce résultat soit acquis, les biologistes avaient cessé de s'intéresser à la question... mais pas les mathématiciens !

Bien que les équations de Turing soient trop simples pour décrire un phénomène biologique réel, elles engendrent les mêmes types de structures que celles observées chez les animaux. Des pigments déposés selon les pics (ou les creux) d'ondes parallèles forment des bandes (voir la figure 1). Des ondes plus complexes modélisent un réseau tacheté. Les mathématiciens ont ensuite étoffé le schéma de Turing et mis au point des modèles plus proches du monde vivant.

En 1995, Shigeru Kondo et Rihito Asai, de l'Université de Tokyo, ont découvert des

structures de Turing chez des poissons du genre scalaire (des poissons d'Amazonie, aplatis et rayés de jaune et noir). Ils ont observé la croissance de ces poissons et remarqué le réarrangement graduel de leurs rayures. Chez les mammifères, les motifs cutanés ne font que grandir avec l'animal. En revanche, chez les scalaires, à mesure que l'animal croît, de nouvelles rayures apparaissent par division des anciennes. Ces modifications sont décrites par des équations très proches de celles de Turing. Simulées sur un ordinateur, les interactions moléculaires d'un réseau unidimensionnel de cellules adoptent une structure ondulée bien adaptée au réarrangement des rayures des scalaires observés (voir la figure 1).

La lenteur du déplacement des rayures explique sans doute pourquoi on ne le remarque pas, néanmoins, pour paraphraser Galilée : «et pourtant, elles bougent !»

Réactions

Dans l'article *Simple pavés* (voir *Pour la Science*, juin 2000), j'indiquais que personne n'avait encore proposé de classification de l'ensemble E des pavages qui, convenablement assemblés, forment des répliques d'eux-mêmes. Selon Aaron Meyerowitz, de l'Université de Floride, ce problème est certainement difficile au sens de la complexité algorithmique, c'est-à-dire qu'un ordinateur requiert énormément de temps pour traiter une solution.

Restreignons-nous aux polyominos, des polygones formés de carrés joints par leurs côtés. On sait que le problème du pavage d'un rectangle par un ensemble donné de polyominos est «insoluble» : tout algorithme utilisé pour le résoudre demanderait un temps rédhibitoire pour donner une réponse. Le pavage d'un rectangle avec une forme unique de polyominos est vraisemblablement de même ordre. De plus, nous savons qu'un polyomino qui peut paver un rectangle appartient à E : on peut toujours assembler ces rectangles (tant que le rapport de leur longueur sur leur largeur est un nombre rationnel) pour former un carré, puis réunir des copies de ce carré pour dupliquer le polyomino initial. Aussi, il semble intuitif que la classification des seuls polyominos de l'ensemble E soit une tâche impossible.