

TRIBUNE DES LECTEURS

Les deux arithmétiques

L'article de Patrick Dehornoy (voir *Pour la Science*, décembre 2000) appelle une remarque. Pris ensemble, les théorèmes de Goodstein et de Kirby-Paris semblent contredire le théorème de complétude de Gödel. En effet, si le théorème de Goodstein était valide dans tous les modèles de l'arithmétique ordinaire, c'est-à-dire dans la théorie du premier ordre fondée sur les axiomes de Peano, il admettrait une preuve dans cette théorie. C'est ce qu'exclut le théorème de Kirby-Paris.

L'explication de ce paradoxe est la suivante. La démonstration de Goodstein requiert l'emploi des ordinaux. Or ceux-ci interviennent dans la description d'un modèle unique M de l'arithmétique au sein d'un modèle univoquement choisi E de la théorie des ensembles. M est l'ensemble des ordinaux qui précèdent le premier ordinal limite ω . Mais il existe dans E une infinité de modèles de l'arithmétique ordinaire. Le théorème de Goodstein est valide dans M , mais il est non valide dans un autre modèle au moins de l'arithmétique dans E . Autrement dit, l'énoncé de Goodstein est un théorème dans une théorie arithmétique plus exigeante que l'arithmétique de Peano.

Il existe donc deux théories arithmétiques. La première comporte les théorèmes «ordinaires» qui ne découlent que des axiomes du premier ordre de Peano. La seconde comporte en outre des théorèmes qui requièrent toute la force de la théorie des ensembles et qui ne sont pas valides dans l'arithmétique de Peano. C'est le cas du théorème de Goodstein.

Le théorème de Goodstein ne peut pas être substitué au premier théorème d'incomplétude de Gödel. Il ne donne pas un théorème prouvant l'existence, dans l'arithmétique de Peano supposée consistante, d'une formule dont on ne peut prouver ni qu'elle est vraie ni qu'elle est fausse. Il montre qu'il existe, dans la théorie des ensembles, des théorèmes d'arithmétique qui ne sont pas valides dans l'arithmétique de Peano. Il est intéressant d'observer l'irruption de théorèmes non banals de logique mathématique dans un domaine mathématique qui semble à l'abri de telles intrusions.

André DELESSERT, Lausanne

Réponse de Patrick Dehornoy

La remarque d'André Delessert est tout à fait juste. Les théorèmes de Goodstein et Kirby-Paris ne se substituent en aucun cas au théorème de Gödel, et ils ne le redémontrent pas non plus : ce qu'ils font est

d'illustrer de façon simple la situation d'incomplétude décrite par le théorème de Gödel.

Parler de deux arithmétiques ne doit pas abuser le lecteur : il ne faudrait pas imaginer que l'arithmétique de la théorie des ensembles s'oppose à celle de Peano ; les deux s'accordent sur ce qui constitue tout le noyau central des mathématiques et, justement, il faut aller chercher des bizarreries comme le théorème de Goodstein pour les séparer.

Un tunnel alpin

Dans l'article sur les tunnels alpins (voir *Pour la Science*, février 2001), les auteurs semblent ignorer le percement au XV^e siècle, sous la crête frontière de partage des eaux, entre la haute vallée du Pô et le Queyras, du tunnel, nommé Perthuis du Viso, à côté duquel le premier percement signalé dans l'article en 1707 dans une gorge est bien modeste.

L'étude de Louis Vaccarone *Le Perthuis du Viso*, qui se réfère à des documents du XV^e siècle, reprise dans l'ouvrage *Le Queyras*, écrit par le Général A. Guillaume et édité par la Société d'études des Hautes-Alpes, apporte quelques compléments d'informations.

Ainsi, «avant son percement, le transport des marchandises de France vers le marquisat de Saluces et vice versa, exigeait un voyage long et pénible».

«Louis, Marquis de Saluces, pensa qu'il était possible d'ouvrir à travers le Viso une galerie qui offrirait une route plus commode, plus courte devant activer le commerce entre la France et le marquisat, surtout celui du sel de Provence.»

«Des ingénieurs procédèrent aux études nécessaires. C'est ainsi que fut prise la décision d'ouvrir, sous le col de la Traversette, un tunnel.»

«Antonio Ferrero di Borgo Alice fut envoyé auprès du Parlement de Grenoble au mois de juin 1475 pour lui exposer la décision prise par le Marquis Louis de Saluces dont il était le conseiller.»

«Le parlement de Grenoble, ayant peu de confiance dans les chances d'une telle entreprise, ordonna aux auditeurs de la Chambre du Dauphiné de prendre des informations secrètes à son sujet.»

«Les quatre auditeurs désignés répondirent, après avoir prêté serment, qu'ils connaissaient le mont Viso ; qu'il était possible de percer cette montagne au grand avantage du Roi Dauphin Louis, du Marquis de Saluces, de leurs sujets et de tous les voyageurs en général.»

«La galerie était livrée à la circulation à la fin de 1480. Le Marquis de Saluces annonça cette heureuse nouvelle au Roi de France au mois de février 1481.»

Il y a quelques années, ce tunnel a été remis en état surtout par des bénévoles, notamment du Club alpin français local. Il n'a pas été utilisé bien longtemps, mais il est peut-être le plus ancien tunnel des Alpes.

Claude LABRE, Embrun

Des noms d'oiseaux

Dans son article sur la laideur des noms de plantes (Voir *Pour la Science*, février 2001) Didier Nordon ne va pas au bout du problème. Le Français a oublié le nom de ses plantes, et il y en a de merveilleux. On en trouve en nombre dans la Flore illustrée de France de Bonnier. Tous les noms cités ne sont que des noms scientifiques récemment inventés et qui sont utilisés en français, souvent à la place de mots que l'on pourrait trouver dans les parlers régionaux. C'est un manque total de curiosité et de culture qui a conduit les biologistes français à ignorer totalement le vocabulaire magnifique et très riche de leur langue pour lui substituer un artificiel jargon élitiste hermétique. À l'inverse, l'Allemand a conservé un riche vocabulaire de noms de plantes.

Pour les oiseaux, les premiers ornithologues ont souvent su trouver dans les parlers régionaux des noms pour désigner les espèces qui n'étaient pas connues dans la région de Paris, où se faisait la plupart des travaux scientifiques. Ainsi, chocard, crave, mauris, tarin, bruant, même s'ils ne désignent plus les espèces auxquelles ils se rapportaient, survivent-ils encore. À part troglodyte, tichodrome, œdicnème, percnoptère, et quelques autres espèces affublées de noms scientifiques, les oiseaux européens sont-ils désignés par des noms français. À cet égard, nous essayons de faire connaître le travail de Michel Deshayes sur l'origine des noms d'oiseaux.

Il est bien entendu beaucoup plus difficile de s'y retrouver pour le nom des plantes, car d'une région à l'autre, il peut désigner des espèces différentes. Ce qui a manqué, c'est une autorité qui aurait eu l'audace de proposer une liste des noms français pour les plantes, différente de la liste des noms scientifiques. Peut-être n'est-il pas trop tard.

Jean-Claude PRAZ, Sion (Suisse)

Écrivez à *Pour la Science* vos réactions, vos commentaires et vos réflexions sur l'actualité scientifique et vos relations avec la science. L'adresse de *Pour la Science* sur Internet est : tribune@pourlascience.fr. Découvrez d'autres contributions de lecteurs sur le site Web www.pourlascience.com.