

les dénominateurs le sont aussi» n'est vraie que si les numérateurs ne sont pas nuls : par exemple, $0/12 = 0/7$, et 12 n'est pas égal à 7!

Dans notre exemple, $4x - 40$ est nul, car x n'est pas n'importe quel nombre, mais la solution de l'équation de départ, qui justement est 10, ce que l'on vérifie par les calculs suivants.

L'équation de départ donne :

$$(13 - x)(4x - 40) = (7 - x)(4x - 40),$$

ce qui, après regroupement dans le premier membre, conduit à $24(x - 10) = 0$, c'est-à-dire $x = 10$.

PLUS QUE LUI-MÊME?

Prouvons que tout nombre est plus grand que lui-même! Soit a et b deux nombres positifs tels que : $a > b$.

On multiplie les deux nombres par b : $ab > b^2$, on soustrait a^2 de chaque côté et l'on factorise : $a(b-a) > (b-a)(b+a)$.

On divise maintenant par $(b-a)$, qui n'est pas nul, et l'on obtient : $a > b+a$. Puisque b est positif, a est donc plus grand que lui-même et même plus grand que tout nombre plus grand que lui-même. Où est l'erreur?

Solution : Simplement dans le fait (à ne jamais oublier) que, lorsqu'on multiplie ou divise les deux membres d'une inégalité, celle-ci n'est préservée que si ce par quoi on multiplie ou divise est positif. Si ce par quoi on multiplie ou divise est négatif, l'inégalité est inversée. Ici, en divisant par $(b-a)$, qui est négatif, on obtient : $a < b+a$, ce qui n'est nullement paradoxal.

TROIS FOIS RIEN

L'exemple suivant est encore élémentaire, mais, à la fin d'un cours, il ne manquera pas de faire son petit effet.

On démontre que $1+2+3+\dots+n = n(n+1)/2$ par la méthode que l'on veut (par exemple en écrivant $1+2+3+\dots+n$, et juste en dessous $n+1+2+3+\dots+1$).

L'égalité étant vraie pour tout n , écrivons-la pour $n-1$:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = (n-1) n/2.$$

Ajoutons 1 de chaque côté de cette égalité :

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + 1 = (n-1) n/2 + 1.$$

Arrangeons tout cela en sachant que $(n-1) + 1 = 0n$ on obtient :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = (n-1) n/2 + 1.$$

On a donc : $n(n+1)/2 = (n-1) n/2 + 1$ ce qui donne : $n^2 + n = n^2 - n + 2$, et finalement $n=1$. Tout entier est égal à 1!

Que doivent vous dire les élèves endormis que la conclusion étrange a peut-être sortis de leur torpeur?

Solution : Si $(n-1) + 1 = n$ est vrai, il n'est pas exact que $1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + 1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$, car, l'avant-dernier

3. LES PAGES D'ERRATA DES LIVRES DE MATHÉMATIQUES

Les livres de mathématiques ont une particularité remarquable : ils sont bourrés de fautes. Les auteurs consciencieux collectent les erreurs que leur signalent les lecteurs et publient alors des «errata» qui sont parfois étonnants.

Chaque chapitre du traité général de mathématiques de Bourbaki était lu et relu par les membres du collectif qui se cachait sous le nom de Bourbaki (voir *Bourbaki*, par Maurice Mashaal, collection *Les génies de la science*). Après un tel passage au crible, on s'attend à ce qu'aucune erreur ne subsiste. Les fascicules d'*errata* publiés par le vrai-faux Général Bourbaki montrent que c'est loin d'être le cas. On a reproduit ci-dessous les premières pages du fascicule d'*errata* numéro 13 (il y en a donc déjà eu 12 auparavant!), qui comporte 7 pages.

Aujourd'hui l'Internet rend le travail plus simple. Outre qu'il permet à l'auteur d'être rapidement informé de ses erreurs par courrier électronique, il permet aussi la publication de volumineux textes d'*errata* qu'aucun éditeur n'aurait accepté d'imprimer, de peur d'y perdre tout crédit. À titre d'exemple, les *errata* de l'*Encyclopédie concise des mathématiques* d'Éric Weisstein (*Concise Encyclopedia of Mathematics*, CRC Press, 1999) comportent 69 pages bien serrées (on n'ose pas penser ce qu'auraient été les errata si l'*Encyclopédie* n'avait pas été «concise»). Son adresse est : www.treasure-troves.com/buy/math/book/errata/

Donald Knuth, le mathématicien créateur du traitement de texte *Tex* (utilisé par la communauté mathématique) et auteur du *Traité de référence sur les mathématiques de la programmation* (*The Art of Computer Programming*) a lui aussi mis à la disposition des lecteurs une série de fascicules d'*errata* qui comportent 80 pages pour le volume 1, 142 pages pour le volume 2, 109 pour le volume 3. Adresse internet : www-cs-faculty.stanford.edu/~knuth/taocp.html

Bon joueur, D. Knuth offre 2,56 dollars pour chaque nouvelle erreur qu'on lui signalera. (Il n'explique pas pourquoi 2,56, mais, n'en doutons pas cela résulte d'un savant calcul – exact espérons-le – rattaché à ses droits d'auteur).



Théorie des ensembles

CHAPITRE III

Ensembles ordonnés. Cardinaux. Nombres entiers

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE, FASCICULE XX TROISIÈME ÉDITION

- P. 40, ligne 9 du haut, au lieu de : $r \in E$, lire : $r \in E$.
P. 77, ligne 15 du haut, au lieu de : $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$, lire : $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$. Ligne 3 du bas, au lieu de : *ordonné*, lire : *préordonné*.
P. 82, ligne 9 du haut, au lieu de : de E_α dans E_β , lire : de F_α dans F_β .
P. 83, ligne 6 du haut, au lieu de : prop. 2, lire : prop. 1. Ligne 15 du bas, au lieu de : $\lambda \geq \mu$, lire : $\lambda \leq \mu$.
P. 86, ligne 13 du haut, au lieu de (ii), lire (ii').
P. 90, ligne 6 du haut, au lieu de : $f_{\alpha\beta}(u)$, lire : $f_{\beta\alpha}(u)$.
P. 95, ligne 7 du haut, au lieu de : $f_{\beta\alpha}(u_\alpha(x_\alpha))$, lire : $f_{\beta\alpha}(u_\alpha(x_\alpha))$. Ligne 8 du haut, au lieu de : $u_\alpha(f_{\beta\alpha}(x_\alpha))$, lire : $u_\beta(f_{\beta\alpha}(x_\alpha))$.
P. 96, ligne 8 du bas, au lieu de : $\lim_{\alpha} E_\alpha^1$, lire : $\lim_{\alpha} E_\alpha^1$. Ligne 1 du bas, au lieu de F_α^1 , lire F_α^1 .
P. 97, ligne 14 du haut, au lieu de g^α , lire g_α^1 (deux fois). Ligne 5 du bas, au lieu de : $\lim_{\alpha} (\lim_{\beta} u_\beta^1)$, lire : $\lim_{\alpha} (\lim_{\beta} u_\beta^1)$.
P. 103, ligne 14 du bas, au lieu de A, lire X; au lieu de B, lire Y.

terme (non écrit) à gauche est $n-2$, alors qu'à droite c'est $n-1$. Les trois petits points, selon les contextes, ne désignent pas la même chose.

PEUT-ON ÉCRIRE $\sqrt{-1}$?

Les nombres complexes sont définis à partir de l'idée que -1 possède une racine carrée que l'on considère comme un nombre nouveau et que l'on note souvent par la lettre i . Par définition, $i^2 = -1$. Pour plus de commodité on peut noter ce nombre supplémentaire par $\sqrt{-1}$.

On obtient alors de drôles de choses, comme cette suite d'égalités :

$$\begin{aligned} -1 &= \sqrt{-1} \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1, \\ \text{ou ce raisonnement :} \\ \sqrt{-1} &= \sqrt{-1}, \text{ donc } \sqrt{1/(-1)} = \sqrt{(-1)/(1)}, \text{ donc} \\ \sqrt{1x/1} &= \sqrt{-1x/-1}, \text{ donc } 1 = -1. \end{aligned}$$

Comment expliquer cela? Les nombres complexes sont-ils contradictoires, et les mathématiciens qui les utilisent sont-ils nécessairement conduits à écrire des choses absurdes?

Solution : Les nombres complexes ne sont pas plus contradictoires que les nombres réels (cela se démontre en faisant la