

les dénominateurs le sont aussi» n'est vraie que si les numérateurs ne sont pas nuls : par exemple,  $0/12 = 0/7$ , et 12 n'est pas égal à 7!

Dans notre exemple,  $4x - 40$  est nul, car  $x$  n'est pas n'importe quel nombre, mais la solution de l'équation de départ, qui justement est 10, ce que l'on vérifie par les calculs suivants.

L'équation de départ donne :

$$(13 - x)(4x - 40) = (7 - x)(4x - 40),$$

ce qui, après regroupement dans le premier membre, conduit à  $24(x - 10) = 0$ , c'est-à-dire  $x = 10$ .

## PLUS QUE LUI-MÊME?

*Prouvons que tout nombre est plus grand que lui-même! Soit  $a$  et  $b$  deux nombres positifs tels que :  $a > b$ .*

*On multiplie les deux nombres par  $b$  :  $ab > b^2$ , on soustrait  $a^2$  de chaque côté et l'on factorise :  $a(b-a) > (b-a)(b+a)$ .*

*On divise maintenant par  $(b-a)$ , qui n'est pas nul, et l'on obtient :  $a > b+a$ . Puisque  $b$  est positif,  $a$  est donc plus grand que lui-même et même plus grand que tout nombre plus grand que lui-même. Où est l'erreur?*

**Solution :** Simplement dans le fait (à ne jamais oublier) que, lorsqu'on multiplie ou divise les deux membres d'une inégalité, celle-ci n'est préservée que si ce par quoi on multiplie ou divise est positif. Si ce par quoi on multiplie ou divise est négatif, l'inégalité est inversée. Ici, en divisant par  $(b-a)$ , qui est négatif, on obtient :  $a < b+a$ , ce qui n'est nullement paradoxal.

## TROIS FOIS RIEN

L'exemple suivant est encore élémentaire, mais, à la fin d'un cours, il ne manquera pas de faire son petit effet.

On démontre que  $1+2+3+\dots+n = n(n+1)/2$  par la méthode que l'on veut (par exemple en écrivant  $1+2+3+\dots+n$ , et juste en dessous  $n+ \dots+3+2+1$ ).

L'égalité étant vraie pour tout  $n$ , écrivons-la pour  $n-1$  :

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = (n-1) n/2.$$

Ajoutons 1 de chaque côté de cette égalité :

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + 1 = (n-1) n/2 + 1.$$

Arrangeons tout cela en sachant que  $(n-1) + 1 = 0n$  on obtient :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = (n-1) n/2 + 1.$$

On a donc :  $n(n+1)/2 = (n-1) n/2 + 1$  ce qui donne :  $n^2 + n = n^2 - n + 2$ , et finalement  $n=1$ . Tout entier est égal à 1!

Que doivent vous dire les élèves endormis que la conclusion étrange a peut-être sortis de leur torpeur?

**Solution :** Si  $(n-1) + 1 = n$  est vrai, il n'est pas exact que  $1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + 1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ , car, l'avant-dernier

## 3. LES PAGES D'ERRATA DES LIVRES DE MATHÉMATIQUES

Les livres de mathématiques ont une particularité remarquable : ils sont bourrés de fautes. Les auteurs consciencieux collectent les erreurs que leur signalent les lecteurs et publient alors des «errata» qui sont parfois étonnants.

Chaque chapitre du traité général de mathématiques de Bourbaki était lu et relu par les membres du collectif qui se cachait sous le nom de Bourbaki (voir *Bourbaki*, par Maurice Mashaal, collection *Les génies de la science*). Après un tel passage au crible, on s'attend à ce qu'aucune erreur ne subsiste. Les fascicules d'*errata* publiés par le vrai-faux Général Bourbaki montrent que c'est loin d'être le cas. On a reproduit ci-dessous les premières pages du fascicule d'*errata* numéro 13 (il y en a donc déjà eu 12 auparavant!), qui comporte 7 pages.

Aujourd'hui l'Internet rend le travail plus simple. Outre qu'il permet à l'auteur d'être rapidement informé de ses erreurs par courrier électronique, il permet aussi la publication de volumineux textes d'*errata* qu'aucun éditeur n'aurait accepté d'imprimer, de peur d'y perdre tout crédit. À titre d'exemple, les *errata* de l'*Encyclopédie concise des mathématiques* d'Éric Weisstein (*Concise Encyclopedia of Mathematics*, CRC Press, 1999) comportent 69 pages bien serrées (on n'ose pas penser ce qu'auraient été les errata si l'*Encyclopédie* n'avait pas été «concise»). Son adresse est : [www.treasure-troves.com/buy/math/book/errata/](http://www.treasure-troves.com/buy/math/book/errata/)

Donald Knuth, le mathématicien créateur du traitement de texte *Tex* (utilisé par la communauté mathématique) et auteur du *Traité de référence sur les mathématiques de la programmation* (*The Art of Computer Programming*) a lui aussi mis à la disposition des lecteurs une série de fascicules d'*errata* qui comportent 80 pages pour le volume 1, 142 pages pour le volume 2, 109 pour le volume 3. Adresse internet : [www-cs-faculty.stanford.edu/~knuth/taocp.html](http://www-cs-faculty.stanford.edu/~knuth/taocp.html)

Bon joueur, D. Knuth offre 2,56 dollars pour chaque nouvelle erreur qu'on lui signalera. (Il n'explique pas pourquoi 2,56, mais, n'en doutons pas cela résulte d'un savant calcul – exact espérons-le – rattaché à ses droits d'auteur).



## Théorie des ensembles

### CHAPITRE III

### Ensembles ordonnés. Cardinaux. Nombres entiers

#### ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE, FASCICULE XX TROISIÈME ÉDITION

- P. 40, ligne 9 du haut, au lieu de :  $r \in E$ , lire :  $r \in E$ .  
P. 77, ligne 15 du bas, au lieu de :  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , lire :  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Ligne 3 du bas, au lieu de : *ordonné*, lire : *préordonné*.  
P. 82, ligne 9 du haut, au lieu de : de  $E_n$  dans  $E_2$ , lire : de  $F_n$  dans  $F_2$ .  
P. 83, ligne 6 du haut, au lieu de : prop. 2, lire : prop. 1. Ligne 15 du bas, au lieu de :  $\lambda \geq \mu$ , lire :  $\lambda \leq \mu$ .  
P. 86, ligne 13 du haut, au lieu de (ii), lire (ii').  
P. 90, ligne 6 du haut, au lieu de :  $f_{\alpha\beta}(u)$ , lire :  $f_{\beta\alpha}(u)$ .  
P. 95, ligne 7 du haut, au lieu de :  $f_{\beta\alpha}(u_\alpha(x_\alpha))$ , lire :  $f_{\beta\alpha}(u_\alpha(x_\alpha))$ . Ligne 8 du haut, au lieu de :  $u_\alpha(f_{\beta\alpha}(x_\alpha))$ , lire :  $u_\beta(f_{\beta\alpha}(x_\alpha))$ .  
P. 96, ligne 8 du bas, au lieu de :  $\lim_{\alpha} E_n^1$ , lire :  $\lim_{\alpha} E_n^1$ . Ligne 1 du bas, au lieu de  $F_n^1$ , lire  $F_n^1$ .  
P. 97, ligne 14 du haut, au lieu de  $g^n$ , lire  $g_n^*$  (deux fois). Ligne 5 du bas, au lieu de :  $\lim_{\alpha} (\lim_{\beta} u_\alpha^1)$ , lire :  $\lim_{\alpha} (\lim_{\beta} u_\alpha^1)$ .  
P. 103, ligne 14 du bas, au lieu de A, lire X; au lieu de B, lire Y.

terme (non écrit) à gauche est  $n-2$ , alors qu'à droite c'est  $n-1$ . Les trois petits points, selon les contextes, ne désignent pas la même chose.

## PEUT-ON ÉCRIRE $\sqrt{-1}$ ?

Les nombres complexes sont définis à partir de l'idée que  $-1$  possède une racine carrée que l'on considère comme un nombre nouveau et que l'on note souvent par la lettre  $i$ . Par définition,  $i^2 = -1$ . Pour plus de commodité on peut noter ce nombre supplémentaire par  $\sqrt{-1}$ .

On obtient alors de drôles de choses, comme cette suite d'égalités :

$$\begin{aligned} -1 &= \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1, \\ \text{ou ce raisonnement :} \\ \sqrt{-1} &= \sqrt{-1}, \text{ donc } \sqrt{1/(-1)} = \sqrt{(-1)/(1)}, \text{ donc} \\ \sqrt{1} \times \sqrt{1} &= \sqrt{-1} \times \sqrt{-1}, \text{ donc } 1 = -1. \end{aligned}$$

Comment expliquer cela? Les nombres complexes sont-ils contradictoires, et les mathématiciens qui les utilisent sont-ils nécessairement conduits à écrire des choses absurdes?

**Solution :** Les nombres complexes ne sont pas plus contradictoires que les nombres réels (cela se démontre en faisant la

construction des premiers à partir des seconds). L'explication des contradictions obtenues tient en quelques mots :

– la formule  $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$  est vraie si  $a$  et  $b$  sont des nombres positifs, mais personne n'a jamais dit qu'elle était vraie pour tout nombre complexe  $a$  et  $b$ . L'erreur provient donc de l'utilisation d'une formule que personne ne démontre jamais.

Essayons d'approfondir un peu l'explication. Rappelons d'abord que :

– tout nombre réel positif possède deux racines carrées, de même que tout nombre complexe non nul.

– la notation  $\sqrt{a}$ , lorsque  $a$  est un nombre réel positif, désigne la racine carrée positive de  $a$ , l'autre racine étant  $-\sqrt{a}$ , et c'est seulement lorsque  $a$  est un nombre réel positif qu'on utilise la notation  $\sqrt{a}$ .

Lorsqu'on passe aux nombres complexes, la difficulté pour étendre la notation est qu'il n'est pas facile de choisir une fois pour toutes l'une des deux racines de  $a$  et de lui attribuer la notation  $\sqrt{a}$ . En fait, il n'existe aucune façon de choisir une convention qui permette de maintenir la formule  $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ . S'il existait une telle convention, on aurait justement :  $-1 = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \times (-1)} = \sqrt{1} = 1$ , ce qui est absurde.

Notre petit jeu a au moins une utilité : correctement interprété, il établit qu'il est impossible de définir  $\sqrt{a}$  pour tout nombre complexe de manière à préserver la formule  $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ , ce qui n'est pas un résultat si évident que cela. La démonstration absurde une fois

remise sur ses pieds fournit une démonstration intéressante. Comme il est difficile de se discipliner pour ne pas utiliser  $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$  pour les nombres négatifs et les nombres complexes, il est préférable d'éviter totalement l'utilisation de la notation  $\sqrt{a}$  en dehors des nombres réels positifs.

## LE MONDE MATHÉMATIQUE EST IMMOBILE

Le principe de récurrence, l'un des outils les plus puissants du raisonnement arithmétique, consiste, pour établir une propriété générale du type «pour tout  $n$ ,  $P(n)$ », à montrer que :

(i)  $P(0)$  est vrai

(ii) si  $P(n)$  est vrai, pour  $n = 0, 1, \dots, k$ , alors  $P(k+1)$ .

Une variante consiste à remplacer (ii) par :

(ii') si  $P(n)$  est vrai pour  $n = k$ , alors  $P(k+1)$ .

Malheureusement, l'intuition est un peu perdue dans la récurrence, aussi de nombreuses erreurs sont-elles possibles. Voici quelques exemples de faux raisonnements par récurrence, dont le premier est dû à Alex Kuperman.

Nous allons démontrer qu'en mathématiques rien ne bouge ; plus précisément, nous établirons que toutes les fonctions  $x^n$  sont des fonctions constantes.

(i) C'est vrai pour  $n = 0$ , car  $x^0 = 1$ .

(ii) Supposons que c'est vrai pour  $n = 0, 1, \dots, k$ , c'est-à-dire que la dérivée de  $x^n$  est nulle :  $(x^n)' = 0$  pour  $n = 0, 1, \dots, k$ . Utilisons maintenant la formule de déri-

vation d'un produit  $(uv)' = u'v + uv'$ . On a :  $(x^{k+1})' = (x \cdot x^k)' = x' \cdot x^k + x \cdot (x^k)'$ .

On obtient 0, car  $x' = (x^1)' = (x^k)' = 0$  d'après l'hypothèse de récurrence. Nous avons donc  $(x^{k+1})' = 0$ , ce que nous souhaitons.

Qu'est-ce qui cloche ?

**Solution :** Lorsque  $k = 0$  on a l'hypothèse que  $(x^0)' = 0$  et non pas, comme le raisonnement l'utilise, que  $(x^0)' = (x^1)' = 0$ . Le passage de  $k$  à  $k+1$  ne marche donc pas pour aller de 0 à 1. La confusion provient de la notation  $n = 0, 1, 2, \dots, k$ , qui laisse croire qu'à chaque étape on a au moins  $P(0)$  et  $P(1)$  vrais, alors qu'en fait lorsque  $k = 0$ , on a seulement  $P(0)$ .

## EN MATHÉMATIQUES, TOUT S'ANNULE

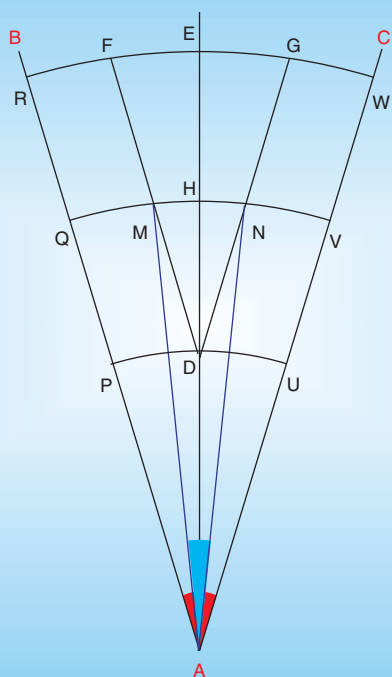
Voici un autre raisonnement faux (mais intéressant!) dû à Richard Johnsonbaugh. Nous allons établir que tous les entiers sont nuls. Démontrons d'abord par récurrence, que si deux entiers positifs ou nuls,  $a$  et  $b$ , ont un maximum inférieur ou égal à  $n$ , alors ils sont égaux. C'est vrai pour les deux entiers  $a$  et  $b$  si leur maximum est inférieur ou égal à 0, car alors nécessairement  $a = 0$  et  $b = 0$ . Supposons que la propriété soit vraie pour tout couple d'entiers  $a$  et  $b$  dont le maximum est inférieur ou égal à  $k$  et montrons que c'est vrai pour  $k+1$ . Soit  $a$  et  $b$  deux entiers positifs ou nuls dont le maximum est inférieur ou égal à  $k+1$ . Le maximum de  $a-1$  et  $b-1$  est inférieur ou égal à  $k$ , donc l'hypothèse de récurrence s'applique, donnant  $a-1 =$

### 4. LA TRISECTION DE L'ANGLE

En 1837, Pierre-Laurent Wantzel, répétiteur à l'École polytechnique publiait un mémoire où il démontrait que la trisection de l'angle était impossible en général. Il réglait en même temps le problème de la duplication du cube (tracer à la règle et au compas un segment de longueur  $\sqrt[3]{2}$  [racine cubique de 2]), mais laissait non résolu le problème de la quadrature du cercle (construire à la règle et au compas un segment de longueur  $\sqrt{\pi}$ ), construction dont on ne démontra l'impossibilité que 45 années plus tard.

Le problème de la trisection de l'angle, vieux de plus de deux mille ans, consiste à se donner un angle quelconque et à dessiner un angle trois fois plus petit, en n'utilisant que des constructions faites avec une règle et un compas. Une solution de Tom Cunniffham semble contredire le résultat de Wantzel.

Soit l'angle BAC à triséquer. En prenant pour centre A, on construit des arcs



de cercle de rayons 2, 3 et 4 unités qui donnent les points P, U, Q, V, R, W. Traçons D, E, F et G, les milieux des arcs PU, RW, RE et EW (c'est faisable à la règle et au compas). Soit M et N les intersections respectives des segments FD et GD avec l'arc QV. L'angle MAN triseque l'angle BAC.

En effet, puisque par construction  $\text{arc}(RW) = 2 \text{ arc}(PU)$ , on déduit que  $\text{arc}(PD) = \text{arc}(RF)$ , et donc que FD est parallèle à RP, d'où il suit que  $\text{arc}(QM) = \text{arc}(RF)$ . De même  $\text{arc}(NV) = \text{arc}(GW) = \text{arc}(RF)$ . Puisque par construction  $3 \text{ arc}(RW) = 4 \text{ arc}(QV)$  et que  $4 \text{ arc}(RF) = \text{arc}(RW)$ , on a  $\text{arc}(QV) = 3 \text{ arc}(RF)$ . QV est triséqué par M et N. Wantzel s'est-il trompé ?

**Solution.** Non. La longueur des deux arcs  $\text{arc}(PD)$  et  $\text{arc}(RF)$  est bien la même, mais cela ne signifie pas que FD est parallèle à RP, car les cercles supports n'ont pas le même rayon.