

$b - 1$ , d'où l'on déduit que  $a = b$ , ce que nous souhaitons.

Maintenant, soit un entier positif ou nul quelconque  $b$ . Soit  $n$  le maximum de 0 et  $b$  (bien sûr  $n = b$ ). Le raisonnement précédent a montré que 0 et  $b$  étaient égaux, donc  $b = 0$ . En conclusion, tous les entiers positifs ou nuls sont nuls.

Si tel était le cas, là aussi les entiers seraient majorés par 0! Où est l'erreur?

**Solution :** Simplement dans le fait que, même si  $a$  et  $b$  sont des entiers positifs ou nuls,  $a - 1$  et  $b - 1$  ne le sont pas nécessairement (car  $0 - 1 = -1$ ). On ne peut donc pas appliquer l'hypothèse de récurrence au couple  $a - 1, b - 1$ .

## DÉSOLANTES DÉRIVÉES

Calculons la dérivée de  $x^3$  de deux façons différentes :

(a) Par la formule habituelle  $(x^n)' = nx^{n-1}$ . Pour tout  $x$ , on a donc  $(x^3)' = 3x^2$

(b) Par le raisonnement suivant. Pour  $x$  entier, on écrit :

$x^3 = x^2 + x^2 + x^2 + \dots + x^2$  (la somme comporte  $x$  fois le terme  $x^2$ )

On dérive de chaque côté :

$(x^3)' = (x^2)' + (x^2)' + (x^2)' + \dots + (x^2)'$  (la dérivée d'une somme est la somme des dérivées).

$(x^3)' = 2x + 2x + 2x + \dots + 2x$  (application de la formule générale rappelée plus haut).

$(x^3)' = 2x^2$  (car, sur la ligne précédente il y a  $x$  fois le terme  $2x$ , ce qui permet de remplacer le second membre par  $2x^2$ ).

Pour tout  $x$  entier, on a donc :

$(x^3)' = 3x^2 = 2x^2$ .

En prenant pour  $x$  un entier non nul et en simplifiant par  $x^2$ , on a :  $2 = 3$ .

Où est l'erreur?

**Solution :** Le raisonnement (b) suppose que  $x$  est entier (sinon, on ne pourrait pas écrire :  $x^3 = x^2 + x^2 + x^2 + \dots + x^2$ ). Appelons  $n$  l'entier auquel on s'intéresse.

Les fonctions  $x \rightarrow x^3$  et  $x \rightarrow x^2 + x^2 + x^2 + \dots + x^2$  ( $n$  fois le terme  $x^2$ ) ont effectivement la même valeur au point  $x = n$ , et cette valeur est  $n^3$ . Mais, autour de la valeur  $n$ , ces deux fonctions n'ont plus les mêmes valeurs, car :  $(n+\epsilon)^3 \neq (n+\epsilon)^2 + (n+\epsilon)^2 + \dots + (n+\epsilon)^2 = n(n+\epsilon)^2$ . Puisque les deux fonctions sont différentes, il est sans surprise que leur dérivée le soit.

L'endroit où se produit l'erreur est lorsqu'on écrit «on dérive de chaque côté» car, l'égalité  $x^3 = x^2 + x^2 + x^2 + \dots + x^2$  désigne une égalité valable entre deux fonctions différentes en un point précis, et non pas une égalité entre deux fonctions sur tout leur ensemble de définition. L'erreur est en fait la même que celle qu'on commettrait en disant :

$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$ , et donc que  $(\sin 45^\circ)' = (\cos 45^\circ)'$ , ce qui est absurde car en utilisant que  $\sin x' = \cos x$  et que  $\cos x' = -\sin x$ , on en déduirait que  $\cos 45^\circ = -\sin 45^\circ$ , soit  $\sqrt{2}/2 = -\sqrt{2}/2$ .

## 5. LA PLUS BELLE PROPRIÉTÉ DE $\pi$

L'importance mathématique du nombre  $\pi$  n'est plus à démontrer. Pourtant la propriété suivante de  $\pi$  ne manquera pas de vous étonner : toute série converge vers  $\pi$ .

En effet, soit une série quelconque (par prudence, vous pouvez considérer une série absolument convergente) :

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + \dots$

Les égalités (finies) suivantes sont immédiates :

$a_1 = \pi + (a_1 - \pi)$

$a_2 = -(a_1 - \pi) + (a_1 + a_2 - \pi)$

$a_3 = -(a_1 + a_2 - \pi) + (a_1 + a_2 + a_3 - \pi)$

$a_4 = -(a_1 + a_2 + a_3 - \pi) + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - \pi)$ . Etc.

En ajoutant toutes ces égalités, nous obtenons :

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + \dots = \pi + (a_1 - \pi) - (a_1 - \pi) + (a_1 + a_2 - \pi) - (a_1 + a_2 - \pi) + (a_1 + a_2 + a_3 - \pi) - (a_1 + a_2 + a_3 - \pi) + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - \pi) - \dots$

Toutes les parenthèses se simplifient deux à deux et disparaissent. Donc :

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + \dots = \pi$ .

Pensez-vous vraiment que cela soit normal?

### Solution

Non, bien sûr, et d'ailleurs le même raisonnement, s'il était juste, s'appliquerait à n'importe quelle constante. Le raisonnement est faux, car l'expression obtenue au second membre après l'addition infinie est une série qui n'est pas même convergente (ni les parenthèses, ni leurs composants ne tendent vers zéro en général). Or avec une série de nombres réels qui n'est pas convergente, toute manipulation, même les simplifications les plus simples, est dangereuse et susceptible de nous entraîner dans l'absurde. Si vous en doutez, considérez l'exemple classique suivant :

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$   
 $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1$

## SOMMES INFINIES

En analyse, on démontre que la série :  $\ln(2) = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + \dots$  est une série convergente, c'est-à-dire qu'en prenant 1, puis 2, puis 3, ... termes de la série, on obtient des nombres qui s'approchent de plus en plus d'une constante, qui est ici le logarithme népérien de 2 :  $\ln 2 = 0,6931\dots$

Groupons les termes positifs d'une part et les termes négatifs de l'autre :

$\ln 2 = (1 + 1/3 + 1/5 + \dots) - (1/2 + 1/4 + 1/6 + \dots)$ .

Par ailleurs nous avons certainement :

$0 = (1/2 + 1/4 + 1/6 + \dots) - (1/2 + 1/4 + 1/6 + \dots)$ .

ce qui, en ajoutant membre à membre avec l'égalité au-dessus, donne :

$\ln 2 = (1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + \dots) - 2(1/2 + 1/4 + 1/6 + \dots)$ ,

c'est-à-dire :

$\ln 2 = (1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + \dots) - (1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + \dots) = 0$ ,

Donc,  $\ln 2 = 0$ .

D'où vient cette absurdité?

**Solution :** L'absurdité provient du fait général qu'on ne peut manipuler les séries sans précaution et qu'en particulier on ne peut changer l'ordre des termes sans risque. Il existe deux sortes de séries convergentes :  
 - celles (dénommées «absolument convergentes») dont la série des valeurs absolues est convergente,  
 - celles (dénommées «semi-convergentes») dont la série des valeurs absolues est infinie. C'est le cas de :

$\ln(2) = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + \dots$

Pour les premières, on peut changer l'ordre des termes, additionner termes à termes, etc, comme nous l'avons fait ici. Pour les autres, Riemann a démontré au contraire que changer l'ordre des termes pouvait conduire à n'importe quelle valeur entre  $-\infty$  et  $+\infty$ , et en fait toutes sortes d'absurdités peuvent être déduites de la manipulation sans précaution de séries semi-convergentes. L'exemple proposé est l'un des plus brefs qui le montre.

**ARISTOTE, Organon VI, Réfutation des arguments sophistiques.** Traduction J. Tricot. Librairie philosophique J. Vrin, Paris, 1987.

**Edward BARREAU, Mathematical Fallacies, Flaws, and Flimflam,** édité par The Mathematical Association of America, 2000, (ISBN 0-88385-529-1).

**E.P. NORTHROP, Fancies and paradoxes mathématiques,** Dunod, Paris, 1956, (tra-

duction de : **Riddles in Mathematics**, D. Van Nostrand Company Inc., New York, 1944).

**Sylviane GASQUET-MORE, Plus vite que son nombre. Déchiffrer l'information.** Éditions du Seuil, Paris 1999.

**Massimo PIATELLI-PALMARINI, Inevitable Illusions : How Mistake of Reason Rule our Minds,** John Wiley and Sons, New York, 1994 (ISBN 0-471-58126-7).