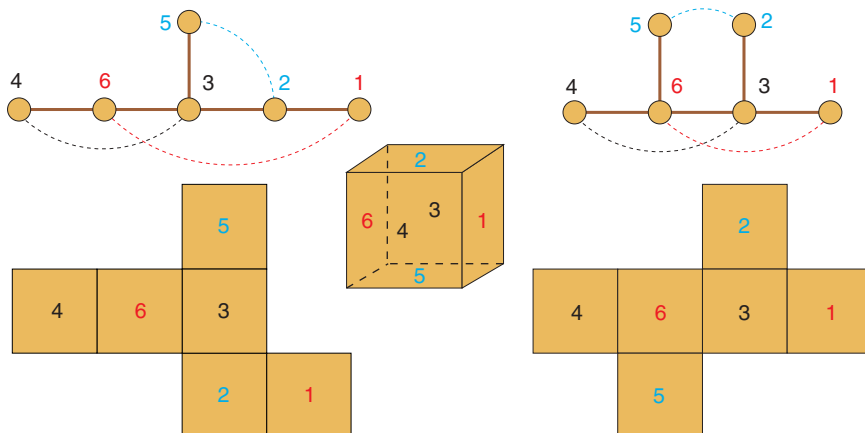


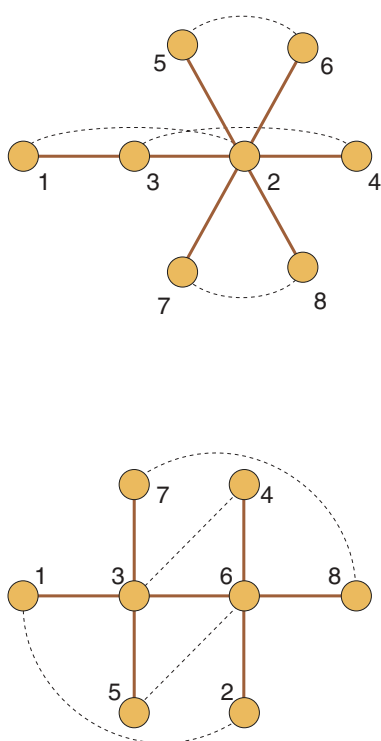
Notons qu'un esprit dans une dimension supérieure «voit» à l'intérieur de l'espace inférieur sans traverser sa surface : les êtres à trois dimensions que nous sommes voient l'intégralité de l'intérieur des formes à deux dimensions qui ne préservent ainsi aucun secret. De même, un esprit «divin» à quatre dimensions distingue l'intérieur de notre corps... et de notre âme.

Passons aux patrons pour étudier la vérité géométrique de la peinture de Dali.

Lorsque nous déplions un carré selon ses sommets (après avoir coupé l'armature du carré en un sommet), nous obtenons le patron à une dimension d'un carré. De même, un cube dont sept arêtes ont été judicieusement coupées s'aplatit en un patron à deux dimensions du cube (voir la figure 2). Or, nous pouvons découper le cube selon différentes combinaisons d'arêtes et réaliser différents patrons. Comment nous assurer qu'une figure est le patron d'un cube ? Par son graphe...



3. Des arbres appariés, des graphes connexes sans cycles dont les sommets sont couplés deux à deux sans que deux sommets voisins ne le soient (en haut), sont un moyen de représenter et de dénombrer les patrons d'un cube (en bas) : ici, 2 des 11 patrons du cube sont figurés.



4. Les patrons de l'hypercube (à droite) sont dénombrés grâce aux arbres appariés à huit sommets couplés deux à deux sans que deux sommets voisins ne le soient (à gauche) : il en existe 261.

On associe à un patron du cube un graphe dont les sommets représentent les faces, et les arêtes, les faces adjacentes. Le graphe d'un cube a donc six sommets (voir la figure 3).

Toutefois, n'importe quel graphe n'est pas l'image d'un patron. D'abord, puisque le patron est d'un seul tenant, le graphe l'est aussi, on dit alors qu'il est connexe. De plus, le patron est plan, donc trois faces ne seront pas adjacentes deux à deux, car elles rendraient impossible le pliage du patron ; le graphe correspondant n'a pas de cycle. De tels graphes, connexes et sans cycles, sont nommés des arbres.

Il est maintenant nécessaire de coupler (par un pointillé) les sommets du graphe correspondant aux faces opposées du cube. Notre numérotation donne une somme des deux faces opposées égale à 7. Des tels arbres sont dits appariés (voir la figure 3).

Ainsi armés, on détermine tous les graphes qui respectent les conditions définies, puis on les compte : il y a 11 arbres à 6 sommets appariés, donc 11 patrons du cube.

Revenons à l'hypercube, tel celui représenté sur le tableau. Imaginons que nous déployons l'hypercube dans notre espace à trois dimensions. Pour ce faire, nous coupons 17 des 24 carrés appartenant aux huit cubes à trois dimensions qui constituent la «surface» de l'hypercube et nous obtenons un patron de l'hypercube, un octocube. Chacun des huit cubes est collé à l'autre par une face.

Ici, on détermine tous les arbres appariés à huit sommets (ces arbres représentent aussi les patrons des octaèdres) qui, non appariés, sont au nombre de 23. Peter Turney a calculé, par ordinateur, qu'il y a 261 arbres à 8 sommets appariés, donc 261 patrons à 3 dimensions de l'hypercube (voir la figure 4). Le tableau de Dali représente l'un d'entre eux.

La projection à deux dimensions du patron d'un hypercube est le patron d'un cube normal, ce que l'on devine sur le damier du bas du tableau où certaines cases noires dessinent ce patron du cube.

Revenons à Dali : qui lui a enseigné les mathématiques ? Dali était friand de rencontres avec des personnes de talents différents : quand il ne rencontrait pas une personne nouvelle par jour, il était malheureux... Le peintre, mathématicien et joueur d'échecs Marcel Duchamp, membre du cénacle de Dali, a peut-être été le mentor du peintre.

Le commentaire de Dali sur son tableau reste ésotérique : «Croix hypercubique où le corps du Christ devient métaphysiquement le neuvième cube suivant les préceptes du discours sur la forme cubique de Juan de Herrera, constructeur de l'Escurial, inspiré par Raymond Lulle.» Ciel!



Jonglerie et théorie des automates

JEAN-CHRISTOPHE NOVELLI

Les mathématiciens découvrent de nouvelles figures de jonglerie.

Un cirque. Une fanfare. Des balles posées sur la scène. Le jongleur entre. Il ramasse les balles, accomplit une figure, laisse à peine au spectateur la possibilité de la suivre, passe rapidement à d'autres figures et montre en quelques minutes sa virtuosité éblouissante en utilisant, au fur et à mesure, 3, 4, 5, 6, 7(!) balles !

Son numéro est splendide, ses mouvements précis, il joue sur la musique, il

change de mouvement tout le temps, les balles ont l'air de voler dans l'air !

Fin du numéro. Tonnerre d'applaudissements !

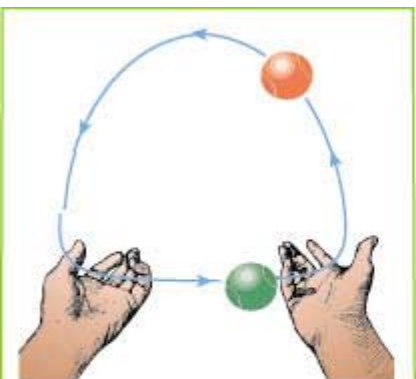
MODÉLISATION DU JONGLAGE

Pour que le numéro du jongleur soit agréable à suivre, il faut qu'il soit varié. Aussi le jongleur présente-t-il une grande diversité de mouvements et quelques lancers spectaculaires. À cette fin, le jongleur dispose d'une panoplie de mouvements qui vont des lancers mains croisées aux lancers dans le dos, en passant par les «pattes de chat» ; il peut utiliser des massues ou même, comble du spectaculaire, des torches enflammées !

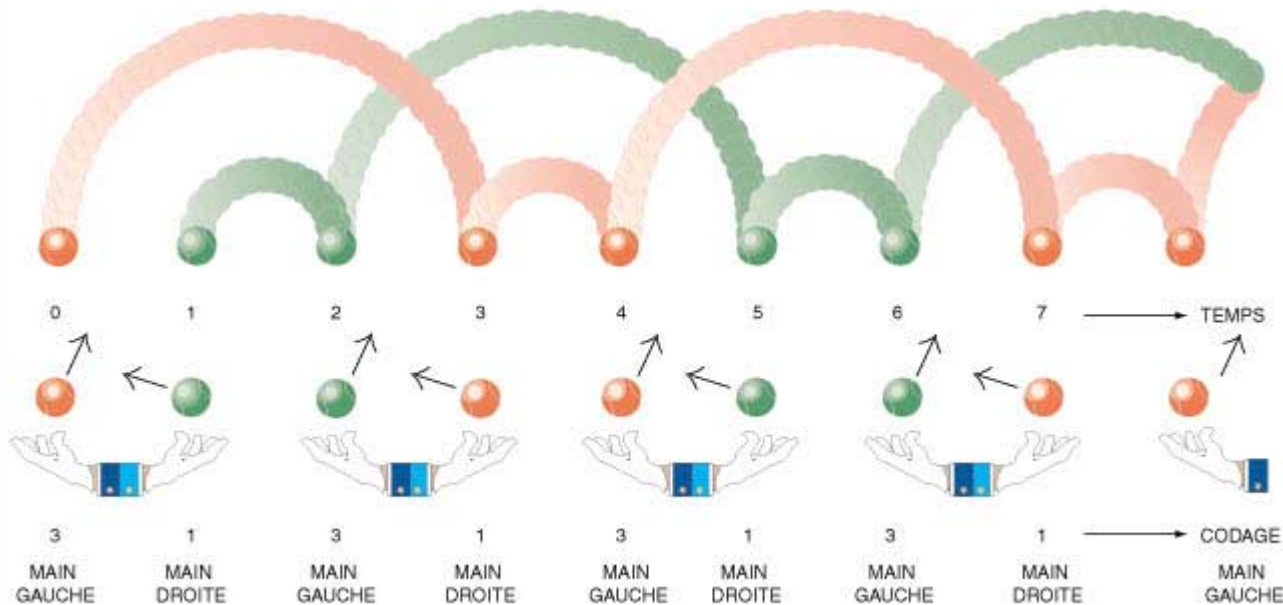
Hormis ces lancers particuliers, qui participent grandement à la variété du numéro, mais qui ne dépendent que de l'imagination du jongleur et de celle de son metteur en scène, le seul autre cri-

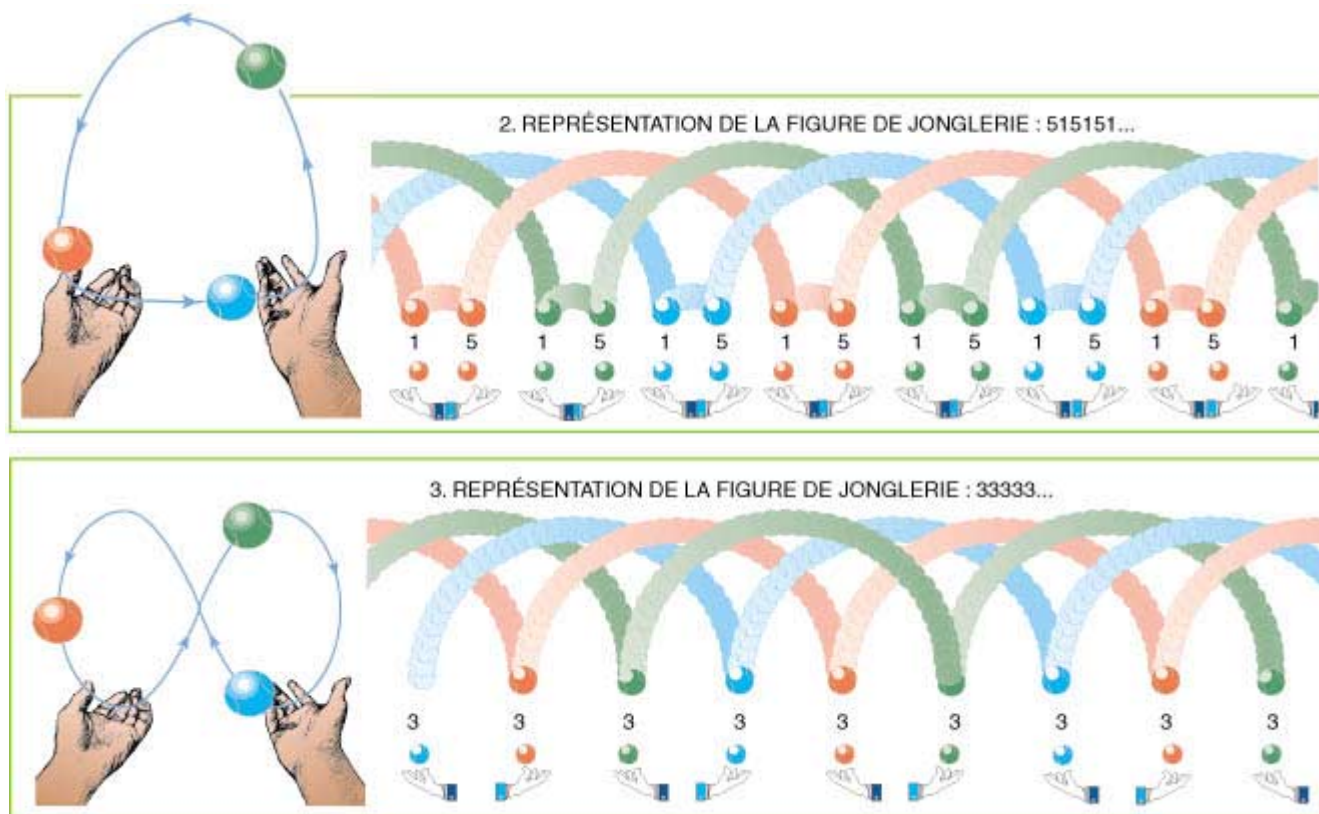
tère sur lequel le jongleur peut jouer pour créer la variété est celle des *figures* elles-mêmes. Les figures de jonglerie à trois balles sont assez nombreuses, mais la diversité vient surtout du fait que l'on peut les combiner à l'infini en passant d'une figure à l'autre par des *transitions* différentes. C'est pour les énumérer, puis les recenser, que les mathématiciens ont élaboré une modélisation de la jonglerie.

En effet, on obtiendra ainsi, et c'est l'une des conséquences positives de la modélisation, un catalogue complet des figures de jonglerie, ainsi que des transitions entre figures, permettant à chacun de découvrir des figures qu'il n'avait pas encore imaginées. C'est d'ailleurs ce qui s'est produit le jour où la modélisation de la jonglerie est née : les jongleurs (et mathématiciens) qui avaient construit cette modélisation ont découvert de nombreuses figures et de nombreuses transitions que nul n'avait imaginées auparavant.



1. LA MODÉLISATION D'UNE FIGURE DE JONGLERIE: 313131...





SIMPLIFICATION ET MODÉLISATION

La jonglerie réelle est complexe et devrait prendre en compte de nombreux paramètres physiques, tels que la force du vent ou la morphologie du jongleur, paramètres qui n'ont aucune inférence sur les figures (ou motifs) de jonglerie elles-mêmes. Pour se concentrer sur ces figures, on oublie le jongleur lui-même pour ne plus voir que ses mains ; on oublie que les balles restent quelques fractions de seconde dans ses mains ; on estime que le jongleur est parfait, c'est-à-dire qu'il lance toutes les balles en suivant un rythme régulier (un rythme même métronomique) ; on oublie enfin qu'il peut croiser les mains ou les décroiser : pour nous, ses mains ne bougent jamais, ce sont les balles qui tombent dans ses mains. Énoncé autrement, on ne tient pas compte de la trajectoire réelle des balles ni de la position du jongleur, on assimile simplement sa jonglerie à une suite d'instantanés où des balles retombent (et sont immédiatement relancées) dans ses mains. Enfin, pour des raisons de faisabilité, on suppose que deux balles ne retombent jamais en même temps (encore que cela soit possible de jongler ainsi et qu'il existe un modèle rendant compte de ce phénomène baptisé *multiplexe*).

En résumé, seuls les temps où les balles sont lancées et rattrapées nous intéressent.

Le nombre 0 correspond à une absence de lancer, c'est-à-dire au cas où

l'on n'a aucune balle en main. Le nombre 1 correspond à un lancer tendu entre les deux mains. Le nombre 2 correspond à un lancer très court d'une main sur elle-même, ce qui, dans la réalité, équivaut à conserver une balle en main et à ne pas la lancer. Le nombre 3 correspond à un lancer d'une main sur l'autre en arc de cercle. Le nombre 4 correspond à un lancer d'une main sur elle-même à une hauteur raisonnable. Et ainsi de suite.

Ces simplifications faites, nous voyons des balles partir d'une main pour aller vers l'autre, en restant un certain temps en l'air, temps variable selon la figure. Transformons cette suite d'images en une suite de nombres entiers. Le jongleur ressemble à un automate qui bouge ses mains alternativement. À chaque «top» pair (par exemple), la main gauche agit, à chaque top impair, la main droite agit. Si la main est vide au moment d'agir, elle ne fait rien (on note cette action par 0) ; sinon, elle lance la balle dont elle dispose (on note cette action par le nombre de temps que la balle reste en l'air).

Par exemple, la suite 31313131... code une figure à deux balles où la main gauche lance des balles haut pour la main droite et où celle-ci plaque très vite les balles qu'elle reçoit dans la main gauche (voir la figure 1). Typiquement, au temps marqué 4, la main gauche va lancer une balle (ici rouge) qui va rester trois temps en l'air et l'autre balle (ici verte) en est à son second temps en l'air et va retomber (dans la main droite) au temps marqué 5, et ainsi de suite.

Cette même figure, lorsque nous ajoutons une balle, se note 51515151... et, visuellement, fait l'effet d'une poursuite des balles sur un cercle (voir la figure 2). Pour finir ce tour des figures classiques, mentionnons la cascade, figure où les balles parcourent un huit couché et qui se note 3333... (voir la figure 3). Pour que la modélisation soit complète et le nombre de configurations fini, nous supposons en outre que le jongleur ne peut pas lancer ses balles trop haut : dans la suite, chacun des entiers est borné par une certaine valeur (humainement parlant, la limite est aux alentours de 11).

Dans notre modèle, les balles ne restent qu'infiniment peu de temps dans les mains, et chaque main agit à tour de rôle : aussi les balles correspondant à des lancers pairs retombent-elles dans la main qui les a lancées, alors que les balles correspondant à des lancers impairs changent de main. Cela est vrai uniquement dans le cas d'un être humain (ou d'un singe) jonglant avec deux mains. Notre modélisation, remarquons-le, est plus générale et ne fait intervenir nulle part le nombre de mains, qui peut donc être tout à fait différent de deux, et, par conséquent, être adapté à la jonglerie des céphalopodes.

Dans cette phase de modélisation, nous avons transformé une figure de jonglerie en une suite de nombres ; nous pouvons passer à la phase suivante, l'étude de la suite des nombres, pour établir la liste complète des figures de jonglerie et trouver toutes les transitions possibles d'une figure à l'autre.