

(à gauche) pour passer de l'état de départ à celui d'arrivée.

Les suites périodiques valides (correspondant à des figures réalisables et répétables indéfiniment) sont les cycles de l'automate, c'est-à-dire les chemins qui bouclent sur leur point de départ. On retrouve par exemple la suite 5151... entre les deux états (rouges) les plus à gauche de l'automate. Et, comme celle-ci ne passe pas par l'état initial, on voit maintenant, sans avoir besoin de faire un test douloureux, pourquoi cette figure ne pouvait pas être réalisée de la position de départ. On trouve ainsi de nombreuses autres suites périodiques que le lecteur pourra chercher dans l'automate, par exemple 45141(en rouge), 504 (en bleu), 55500 (en noir) et 531 (en vert foncé).

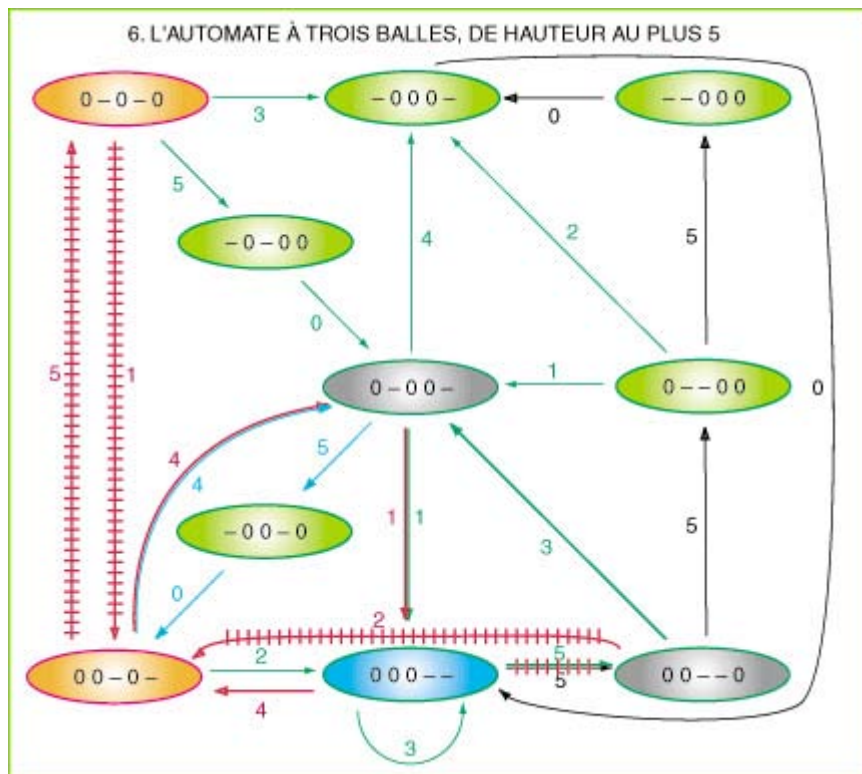
UTILISATION DE L'AUTOMATE

On raconte que plusieurs figures de jonglerie nouvelles ont été découvertes au moment de la construction de l'automate, notamment le 531, figure à trois balles assez complexe, ainsi que le 501, figure à deux balles, qui, depuis lors, a connu un grand succès parmi les jongleurs, car c'est la seule figure à deux balles que l'on ne fait pas du premier coup !

Mais l'apport essentiel de l'automate n'est pas limité aux figures périodiques. En réalité, il permet surtout d'imaginer de nouvelles transitions entre figures. Par exemple, la plupart des jongleurs connaissent le moyen le plus simple pour démarrer une douche (5151...) à partir de la position de départ : lancer deux balles de suite de la même main très haut vers l'autre main.

Cela est effectivement une transition, même si sa traduction dans notre langage contient un petit piège : les lancers très haut vers l'autre main sont manifestement des 5, mais, comme ils sont faits de la même main, c'est que l'autre main est intervenue au milieu, sans rien faire bien qu'ayant une balle en main, ce qui correspond à faire un 2. Ainsi, le démarrage «classique» de la douche consiste, à partir de la position de départ, à faire la suite 525, puis 151515...(rails rouges).

Mais l'automate permet de voir qu'il existe une autre transition, plus directe et plus «propre» vers la douche, qui consiste à faire un 4 à partir de la position de départ. On est alors immédiatement en douche. Ainsi, la variété infinie des figures de jonglerie, qui semblait un peu mise à mal par l'automate, retrouve sa réalité, les transitions entre figures permettant à l'exécutant de montrer son originalité. Nous avons vu l'utilité des



mathématiques dans la théorie de la jonglerie, et nous pourrions nous arrêter ici ; toutefois, pour ceux qui aiment jongler avec les nombres, nous allons ajouter quelques friandises.

SUITES DE MOUVEMENTS VALIDES

Grâce à l'automate, il nous est maintenant facile de savoir si une suite d'entiers donnée est une suite de mouvements valides ou non. En effet, il suffit de la chercher dans l'automate, jusqu'à, soit la trouver et conclure, soit essayer tous les cas et ne pas la trouver... et conclure encore.

Cette recherche est néanmoins fastidieuse, et les mathématiciens ont trouvé un critère simple, qui leur permet de ne pas consacrer leur précieux (?) temps à cette tâche de routine. Ici, nous ne traitons que le cas des suites périodiques valides et montrons le critère abstrait qui permet de décider si la suite est, ou non, valide. En réalité, il existe un autre critère (à peine plus compliqué) permettant de trouver sans doute possible l'état de départ d'une suite, pourvu qu'elle soit «suffisamment» longue.

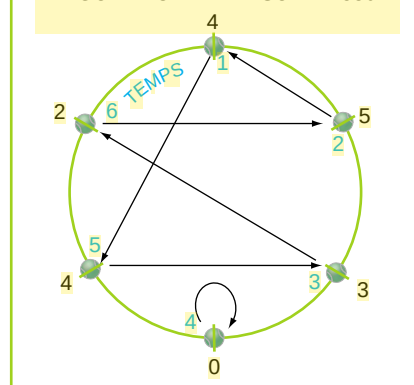
En ce qui concerne les suites périodiques valides, l'idée est la suivante : à chaque «top», une action (lancer de balle ou absence de tel lancer) et une seule se produit. Si l'on imagine ainsi un 0 comme le lancer d'une balle virtuelle, il se produit un lancer, éventuellement virtuel, à chaque «top». Comme la suite

est périodique, il faut aussi qu'une balle lancée dans une des périodes ne retombe pas en même temps qu'une balle lancée dans une autre des périodes.

On représente cela graphiquement de la façon suivante : on place tous les entiers d'une suite (par exemple, 453042) sur un cercle dans le sens des aiguilles d'une montre. On dessine ensuite une flèche partant de chaque entier (cette flèche représente une balle que l'on lance) et arrivant sur l'entier correspondant au moment où la balle retombe.

Ainsi, sur la figure 7, la balle lancée au premier temps (marqué 4) reste quatre temps en l'air et retombe donc à l'autre moment marqué 4. La balle lancée au deuxième temps (marqué 5) retombe cinq temps plus tard, soit sur le premier temps, etc. Le critère que nous avons donné plus haut se traduit sur ce dessin ainsi : chaque

7. FIGURATION DE LA SUITE 453042



flèche arrive à un endroit différent ou, ce qui est équivalent, chaque entier a exactement une flèche qui pointe sur lui. Il existe une traduction purement mathématique à l'aide de modulus, mais elle se ramène à cette vérification une fois décodée.

NOMBRE DE BALLES

Compter le nombre de balles d'une suite périodique supposée *a priori* valide ne nécessite pas d'avoir inventé ni construit l'automate ; cependant, celui-ci permet de conjecturer plus facilement le résultat. En examinant les suites 45051, 45141, 55500 ou 34242, nous constatons que la somme des éléments vaut 15, soit trois (le nombre de balles) fois cinq (la longueur du motif). Plus simplement sur la suite 151515, la somme des éléments est 6 et la périodicité 2, et le quotient 6/2 est égal à 3. Cette phase (que l'on pourrait qualifier d'expérimentale) terminée, on a une intuition du résultat et, comme souvent en combinatoire, la phase « démonstration » se révèle beaucoup plus simple que la phase « recherche » du résultat.

Énonçons le théorème :

On considère une suite d'entiers $(u_1, \dots, u_l)$ que l'on suppose être une suite périodique valide à n balles. On a alors :

$$u_1 + \dots + u_l = kn.$$

La démonstration de ce résultat n'est pas très difficile et peut se voir graphiquement à l'aide de la figure sur un cercle vue au paragraphe précédent. Prenons l'exemple de la figure 564. Elle se présente de la façon suivante.

Le 5 est envoyé sur le 4 et réciproquement, tandis que le 6 boucle sur lui-même. On a ainsi une *partition* des balles de la figure en deux paquets : celles qui font des 5 et des 4, et celles qui font des 6, ces deux ensembles n'ayant aucune balle en commun, comme le montre le dessin.

Dans la figure 564564564..., le 6 se produit une fois tous les trois temps, alors qu'une balle de cette trajectoire particu-

lière met 6 temps à retomber. Il y a donc deux balles sur cette trajectoire. On constate que $6/3 = 2$. De même, les balles qui font des 5 (puis des 4) font un nouveau 5 après 9 temps ($9 = 5 + 4$). Comme les 5 se produisent une fois tous les trois temps, on a donc trois balles sur cette trajectoire particulière. On constate que $(5 + 4)/3 = 3$.

Ainsi, on a cinq balles en tout sur cette figure et, en rassemblant les deux égalités, on voit maintenant le petit miracle $(6+5+4)/3=5$.

NOMBRE DE FIGURES AUTORISÉES

Utilisons maintenant l'automate pour répondre à une question qui nous tarabuste depuis le début de cet article : la variété des figures de jonglerie vient-elle du nombre immense de celles-ci ou plutôt de l'art du jongleur à les juxtaposer ?

Notons $N(b, n)$ le nombre de suites périodiques valides de longueur n à strictement moins de b balles. Il faut une artillerie très développée (que l'on aura tout loisir de trouver expliquée en détail dans l'article de J. Buhler, D. Eisenbud, R. Graham et C. Wright indiqué en bibliographie) pour calculer effectivement ce nombre, ce qui est étonnant au vu de la simplicité du résultat. En effet, on a :

$$N(b, n) = b^n.$$

Pour calculer le nombre de suites valides de longueur n à exactement b balles, on calcule une petite différence et il vient :

$$N'(b, n) = N(b+1, n) - N(b, n) = (b+1)^n - b^n.$$

On trouve donc qu'il existe 37 figures de longueur 3 à trois balles. Mais il faut encore contourner deux difficultés avant d'avoir un résultat qui fait sens. D'abord, dans ces 37 suites, il y a la suite 333 qui est une suite en réalité de longueur 1. Plus généralement, quand on cherche les suites de longueur n , on compte aussi toutes les suites de longueur d où d est diviseur de n .

De plus, une autre difficulté vient du fait que chaque suite de plus petite période n est comptée plusieurs fois : par exemple, la suite 234 est comptée plusieurs fois, car on compte aussi la suite 342 et la suite 423 qui sont la même suite, simplement décalée dans le temps. De façon générale, on compte n fois une suite de plus petite période n .

En rassemblant les deux remarques précédentes, on trouve donc, si l'on note $S(b, n)$ le nombre de suites différentes de plus petite période n :

$$N'(b, n) = \sum_{d|n} d S(b, d).$$

La fonction de Möbius permet d'inverser une telle formule, et le résultat est

le suivant : si l'on note μ la fonction qui vérifie :

$$-\mu(1) = 1,$$

$$-\mu(p_1 \cdot p_2 \dots p_l) = (-1)^l \text{ si les } p_k \text{ sont des nombres premiers différents,}$$

$$-\mu(n) = 0 \text{ sur les autres entiers,}$$

on a alors la formule :

$$\sum_{d|n} (b, n) = 1/n \sum_{d|n} \mu(d) (b+1)^d - b^d$$

En faisant le calcul pour $b = n = 3$, on trouve qu'il y a 12 figures de plus petite période 3 à trois balles. Ce sont :

900 ; 801 ; 720 ; 711 ; 630 ; 612
603 ; 531 ; 522 ; 504 ; 441 ; 423.

CONCLUSION SUR LA DÉMARCHE UTILISÉE

Nous avons voulu illustrer ici la démarche mathématique classique face à un problème venant d'un domaine très éloigné (ici, la jonglerie) : on commence par modéliser le problème en extrayant les informations principales et en éliminant les inutiles ; cette phase est d'une grande importance, et il est impossible de la négliger dans la mesure où elle conditionne la réussite des autres phases. Ensuite, nous avons traité un problème purement mathématique, et ce avec les moyens *ad hoc*, ici la théorie des automates. Enfin, une fois l'automate construit, nous en avons retiré beaucoup de résultats, autant en ce qui concerne la jonglerie que des questions mathématiques. Le travail présenté ici, comme il est d'usage, ouvre plus de portes qu'il n'en ferme, à la fois dans les domaines mathématiques et artistiques...

Jean-Christophe NOVELLI est chargé de recherches à l'université de Lille. Il est lauréat du **Prix d'Alembert des lycéens 2000** organisé par la Société mathématique de France, que nous remercions de la permission de publier ce texte. L'auteur remercie Florent Hivert avec qui il a travaillé les mathématiques de la jonglerie.

J. BUHLER, D. EISENBUD, R. GRAHAM et C. WRIGHT, *Juggling Drops and Descents*, in *American Mathematical Monthly*, 1994.

R. EHRENBORG et M. READDU, *Juggling and Applications to q-analogues*, Actes de la 6^e conférence SFCA (New Brunswick, MJ, 1994), *Disc. Math.* 157, (1996), n) 1-3, 107-125.

S.C. KLEENE, *Representation of Events in Nerve Nets and Finite Automata*, in *Automata Studies*, C.E. Shannon et J. McCarthy Eds, Princeton, 1956.

R.P. STANLEY, *Enumerative Combinatorics*, Wadsworth and Brooks / Cole, 1996.

8. FIGURATION DE LA SUITE 564

