

flèche arrive à un endroit différent ou, ce qui est équivalent, chaque entier a exactement une flèche qui pointe sur lui. Il existe une traduction purement mathématique à l'aide de modulus, mais elle se ramène à cette vérification une fois décodée.

NOMBRE DE BALLES

Compter le nombre de balles d'une suite périodique supposée *a priori* valide ne nécessite pas d'avoir inventé ni construit l'automate ; cependant, celui-ci permet de conjecturer plus facilement le résultat. En examinant les suites 45051, 45141, 55500 ou 34242, nous constatons que la somme des éléments vaut 15, soit trois (le nombre de balles) fois cinq (la longueur du motif). Plus simplement sur la suite 151515, la somme des éléments est 6 et la périodicité 2, et le quotient $6/2$ est égal à 3. Cette phase (que l'on pourrait qualifier d'expérimentale) terminée, on a une intuition du résultat et, comme souvent en combinatoire, la phase « démonstration » se révèle beaucoup plus simple que la phase « recherche » du résultat.

Énonçons le théorème :

On considère une suite d'entiers $(u_1, \dots, u_r)$ que l'on suppose être une suite périodique valide à n balles. On a alors :

$$u_1 + \dots + u_r = kn.$$

La démonstration de ce résultat n'est pas très difficile et peut se voir graphiquement à l'aide de la figure sur un cercle vue au paragraphe précédent. Prenons l'exemple de la figure 564. Elle se présente de la façon suivante.

Le 5 est envoyé sur le 4 et réciproquement, tandis que le 6 boucle sur lui-même. On a ainsi une *partition* des balles de la figure en deux paquets : celles qui font des 5 et des 4, et celles qui font des 6, ces deux ensembles n'ayant aucune balle en commun, comme le montre le dessin.

Dans la figure 564564564..., le 6 se produit une fois tous les trois temps, alors qu'une balle de cette trajectoire particu-

lière met 6 temps à retomber. Il y a donc deux balles sur cette trajectoire. On constate que $6/3 = 2$. De même, les balles qui font des 5 (puis des 4) font un nouveau 5 après 9 temps ($9 = 5 + 4$). Comme les 5 se produisent une fois tous les trois temps, on a donc trois balles sur cette trajectoire particulière. On constate que $(5 + 4)/3 = 3$.

Ainsi, on a cinq balles en tout sur cette figure et, en rassemblant les deux égalités, on voit maintenant le petit miracle $(6+5+4)/3=5$.

NOMBRE DE FIGURES AUTORISÉES

Utilisons maintenant l'automate pour répondre à une question qui nous tarabuste depuis le début de cet article : la variété des figures de jonglerie vient-elle du nombre immense de celles-ci ou plutôt de l'art du jongleur à les juxtaposer ?

Notons $N(b, n)$ le nombre de suites périodiques valides de longueur n à strictement moins de b balles. Il faut une artillerie très développée (que l'on aura tout loisir de trouver expliquée en détail dans l'article de J. Buhler, D. Eisenbud, R. Graham et C. Wright indiqué en bibliographie) pour calculer effectivement ce nombre, ce qui est étonnant au vu de la simplicité du résultat. En effet, on a :

$$N(b, n) = b^n.$$

Pour calculer le nombre de suites valides de longueur n à exactement b balles, on calcule une petite différence et il vient :

$$N'(b, n) = N(b+1, n) - N(b, n) = (b+1)^n - b^n.$$

On trouve donc qu'il existe 37 figures de longueur 3 à trois balles. Mais il faut encore contourner deux difficultés avant d'avoir un résultat qui fait sens. D'abord, dans ces 37 suites, il y a la suite 333 qui est une suite en réalité de longueur 1. Plus généralement, quand on cherche les suites de longueur n , on compte aussi toutes les suites de longueur d où d est diviseur de n .

De plus, une autre difficulté vient du fait que chaque suite de plus petite période n est comptée plusieurs fois : par exemple, la suite 234 est comptée plusieurs fois, car on compte aussi la suite 342 et la suite 423 qui sont la même suite, simplement décalée dans le temps. De façon générale, on compte n fois une suite de plus petite période n .

En rassemblant les deux remarques précédentes, on trouve donc, si l'on note $S(b, n)$ le nombre de suites différentes de plus petite période n :

$$N'(b, n) = \sum_{d|n} d S(b, d).$$

La fonction de Möbius permet d'inverser une telle formule, et le résultat est

le suivant : si l'on note μ la fonction qui vérifie :

- $\mu(1) = 1$,
 - $\mu(p_1 \cdot p_2 \dots p_r) = (-1)^r$ si les p_k sont des nombres premiers différents,
 - $\mu(n) = 0$ sur les autres entiers,
- on a alors la formule :

$$\sum_{d|n} (b, n) = 1/n \sum_{d|n} \mu(d) (b+1)^d - b^d$$

En faisant le calcul pour $b = n = 3$, on trouve qu'il y a 12 figures de plus petite période 3 à trois balles. Ce sont :

900 ; 801 ; 720 ; 711 ; 630 ; 612
603 ; 531 ; 522 ; 504 ; 441 ; 423.

CONCLUSION SUR LA DÉMARCHE UTILISÉE

Nous avons voulu illustrer ici la démarche mathématique classique face à un problème venant d'un domaine très éloigné (ici, la jonglerie) : on commence par modéliser le problème en extrayant les informations principales et en éliminant les inutiles ; cette phase est d'une grande importance, et il est impossible de la négliger dans la mesure où elle conditionne la réussite des autres phases. Ensuite, nous avons traité un problème purement mathématique, et ce avec les moyens *ad hoc*, ici la théorie des automates. Enfin, une fois l'automate construit, nous en avons retiré beaucoup de résultats, autant en ce qui concerne la jonglerie que des questions mathématiques. Le travail présenté ici, comme il est d'usage, ouvre plus de portes qu'il n'en ferme, à la fois dans les domaines mathématiques et artistiques...

Jean-Christophe NOVELLI est chargé de recherches à l'université de Lille. Il est lauréat du **Prix d'Alembert des lycéens 2000** organisé par la Société mathématique de France, que nous remercions de la permission de publier ce texte. L'auteur remercie Florent Hivert avec qui il a travaillé les mathématiques de la jonglerie.

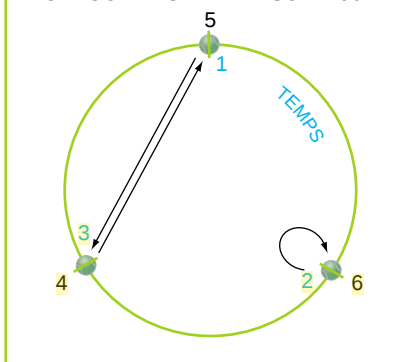
J. BUHLER, D. EISENBUD, R. GRAHAM et C. WRIGHT, *Juggling Drops and Descents*, in *American Mathematical Monthly*, 1994.

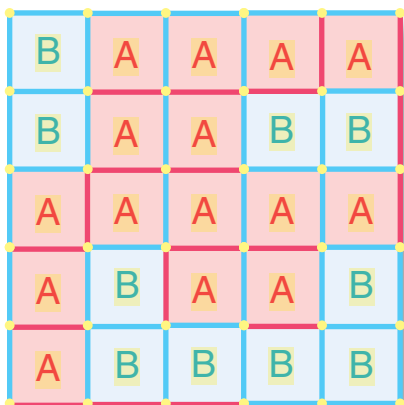
R. EHRENBORG et M. READDU, *Juggling and Applications to q-analogues*, Actes de la 6^e conférence SFCA (New Brunswick, NJ, 1994), *Disc. Math.* 157, (1996), n° 1-3, 107-125.

S.C. KLEENE, *Representation of Events in Nerve Nets and Finite Automata*, in *Automata Studies*, C.E. Shannon et J. McCarthy Eds, Princeton, 1956.

R.P. STANLEY, *Enumerative Combinatorics*, Wadsworth and Brooks / Cole, 1996.

8. FIGURATION DE LA SUITE 564





Un jeu d'enfant pas enfantin

IAN STEWART

Dans le jeu des Petits carrés, pratiqué pendant les cours ennuyeux, il existe plusieurs niveaux de jeu.

La complexité mathématique des jeux les plus simples est stupéfiante, par exemple, le jeu des *Petits carrés*. Des générations d'enfants ont joué à ce jeu, mais pas un sur un million n'en a cherché les meilleures stratégies. Le mathématicien Elwyn Berlekamp, de l'Université de Berkeley, a décrit

les nombreuses subtilités de ce jeu dans son nouvel ouvrage *The Dots-and-Boxes Game* (A. K. Peters, 2000).

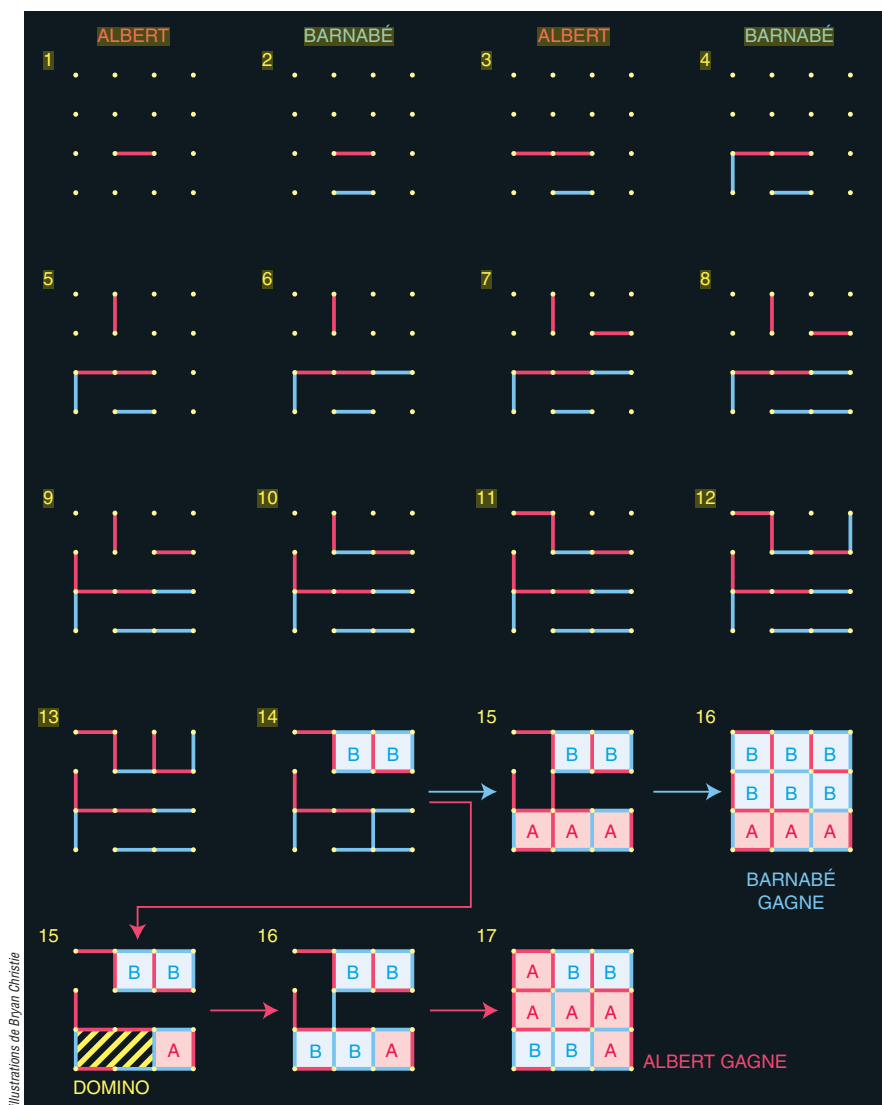
Quelles sont les règles du jeu ? Sur une grille rectangulaire de points, deux joueurs tracent à tour de rôle des segments de droites qui joignent deux points adjacents horizontalement ou verticalement. Lors-

qu'un joueur trace le quatrième segment d'une boîte (un carré de points adjacents), il la marque de son initiale et rejoue, et ce, aussi longtemps qu'il continue à fermer des boîtes. Quand la grille est finie, celui qui a le plus de boîtes a gagné.

Suivons les parties d'Albert et Barnabé. La figure 1 illustre un jeu sur une grille carrée de 16 points où les joueurs utilisent la stratégie la plus simple, nommée le jeu niveau zéro : Albert et Barnabé évitent, aussi longtemps que possible, de tracer le troisième côté d'une boîte et ainsi de donner l'occasion à l'adversaire de créer des boîtes. La grille est alors divisée en une série de chaînes, des régions filiformes d'un carré de largeur (voir la position 12 de la figure 1). Dès qu'un joueur trace une ligne dans une de ces chaînes, l'autre joueur s'octroie une boîte et continue de s'en approprier jusqu'à ce que la chaîne soit entièrement conquise.

À un certain point du jeu, la grille entière est divisée en chaînes ; cet état est dit saturé. Le plus souvent, le joueur suivant coupe la plus petite des chaînes qu'il « offre » ainsi à son adversaire. Ce coup est nommé une « brisure de chaîne ». Le joueur suivant prend ces boîtes, puis brise la plus petite chaîne suivante. Dans l'exemple de la figure 1, à saturation, la grille est divisée en trois chaînes, chacune de deux, trois et quatre boîtes. Au treizième coup, Albert offre la chaîne de deux boîtes à Barnabé. Ce dernier, à son tour, cède la chaîne de trois boîtes à Albert, qui est alors obligé de donner à Barnabé la chaîne de quatre boîtes. Au final, Barnabé gagne par six boîtes à trois.

Dans le jeu de niveau zéro, deux facteurs déterminent le vainqueur : la parité du nombre de chaînes après la saturation, et qui a la main à cet instant du jeu. Par exemple, quand il y a un nombre pair de chaînes à saturation, alors le joueur qui brise la première chaîne gagnera, car, à chaque coup, ce joueur offrira une chaîne plus courte que celle qu'il recevra au tour suivant. En revanche, lorsque le nombre de chaînes est impair à la saturation, le joueur qui brise la première chaîne



Illustrations de Bryan Christie

1. Une partie typique de « petits carrés » qui atteint un moment critique au quinzième coup. Avec la stratégie de niveau zéro (flèches bleues), Albert perd. Avec une stratégie plus élaborée (flèches rouges), il gagne.