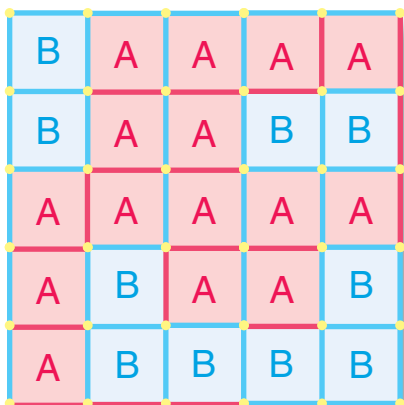




Un jeu d'enfant pas enfantin

IAN STEWART

Dans le jeu des Petits carrés, pratiqué pendant les cours ennuyeux, il existe plusieurs niveaux de jeu.

La complexité mathématique des jeux les plus simples est stupéfiante, par exemple, le jeu des *Petits carrés*. Des générations d'enfants ont joué à ce jeu, mais pas un sur un million n'en a cherché les meilleures stratégies. Le mathématicien Elwyn Berlekamp, de l'Université de Berkeley, a décrit

les nombreuses subtilités de ce jeu dans son nouvel ouvrage *The Dots-and-Boxes Game* (A. K. Peters, 2000).

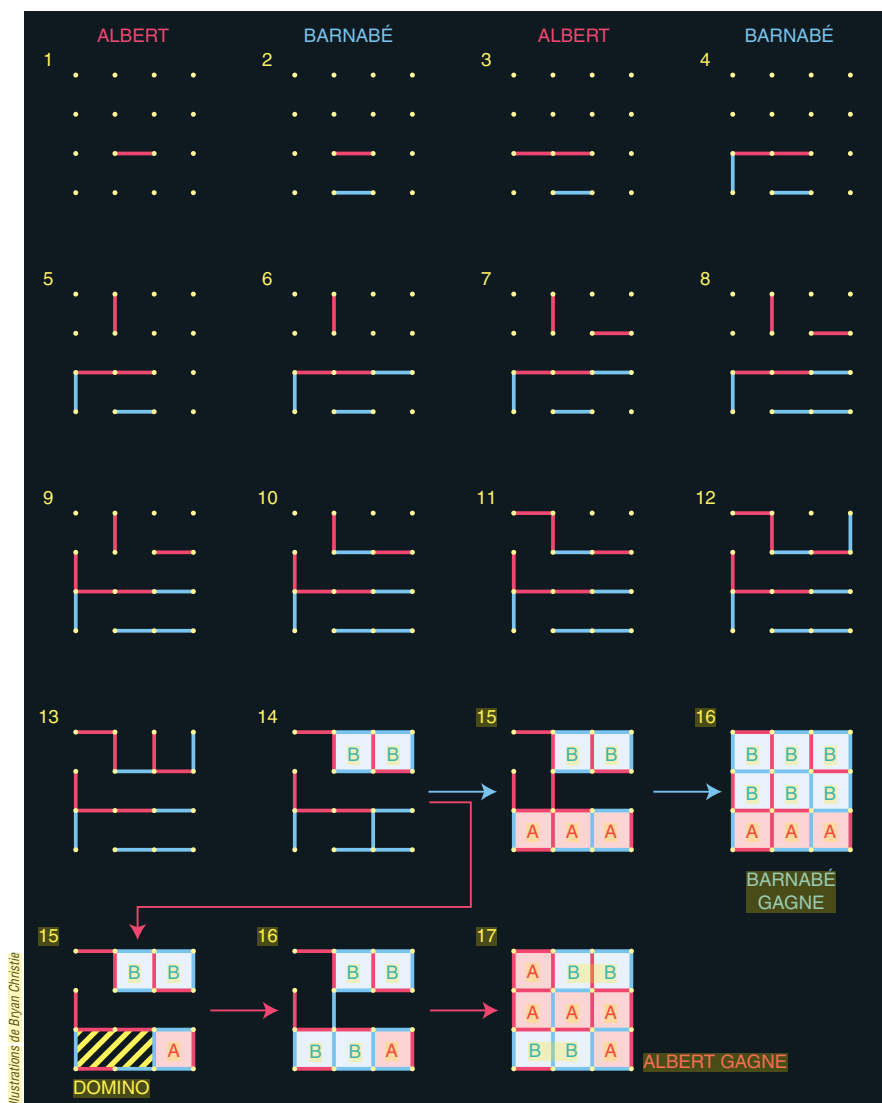
Quelles sont les règles du jeu ? Sur une grille rectangulaire de points, deux joueurs tracent à tour de rôle des segments de droites qui joignent deux points adjacents horizontalement ou verticalement. Lors-

qu'un joueur trace le quatrième segment d'une boîte (un carré de points adjacents), il la marque de son initiale et rejoue, et ce, aussi longtemps qu'il continue à fermer des boîtes. Quand la grille est finie, celui qui a le plus de boîtes a gagné.

Suivons les parties d'Albert et Barnabé. La figure 1 illustre un jeu sur une grille carrée de 16 points où les joueurs utilisent la stratégie la plus simple, nommée le jeu niveau zéro : Albert et Barnabé évitent, aussi longtemps que possible, de tracer le troisième côté d'une boîte et ainsi de donner l'occasion à l'adversaire de créer des boîtes. La grille est alors divisée en une série de chaînes, des régions filiformes d'un carré de largeur (voir la position 12 de la figure 1). Dès qu'un joueur trace une ligne dans une de ces chaînes, l'autre joueur s'octroie une boîte et continue de s'en approprier jusqu'à ce que la chaîne soit entièrement conquise.

À un certain point du jeu, la grille entière est divisée en chaînes ; cet état est dit saturé. Le plus souvent, le joueur suivant coupe la plus petite des chaînes qu'il « offre » ainsi à son adversaire. Ce coup est nommé une « brisure de chaîne ». Le joueur suivant prend ces boîtes, puis brise la plus petite chaîne suivante. Dans l'exemple de la figure 1, à saturation, la grille est divisée en trois chaînes, chacune de deux, trois et quatre boîtes. Au treizième coup, Albert offre la chaîne de deux boîtes à Barnabé. Ce dernier, à son tour, cède la chaîne de trois boîtes à Albert, qui est alors obligé de donner à Barnabé la chaîne de quatre boîtes. Au final, Barnabé gagne par six boîtes à trois.

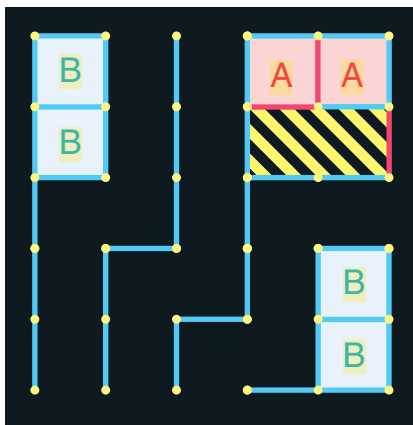
Dans le jeu de niveau zéro, deux facteurs déterminent le vainqueur : la parité du nombre de chaînes après la saturation, et qui a la main à cet instant du jeu. Par exemple, quand il y a un nombre pair de chaînes à saturation, alors le joueur qui brise la première chaîne gagnera, car, à chaque coup, ce joueur offrira une chaîne plus courte que celle qu'il recevra au tour suivant. En revanche, lorsque le nombre de chaînes est impair à la saturation, le joueur qui brise la première chaîne



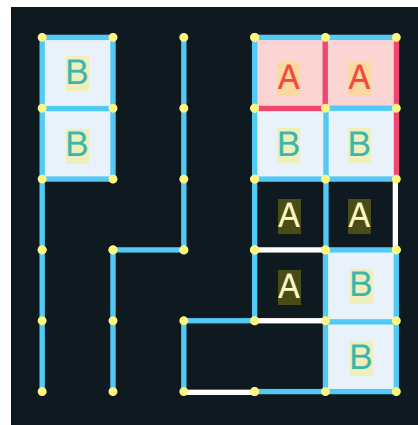
1. Une partie typique de « petits carrés » qui atteint un moment critique au quinzième coup. Avec la stratégie de niveau zéro (flèches bleues), Albert perd. Avec une stratégie plus élaborée (flèches rouges), il gagne.



2. Cette grille (à gauche) a quatre chaînes numérotées de 1 à 4, et deux dominos. Après avoir conquis les deux dominos, Barnabé est confiant, car, à son tour de jouer, le nombre de chaînes est pair : il brise la chaîne (4) de quatre boîtes. Cependant, Albert laisse un



domino que Barnabé ne peut, au tour suivant, que prendre, pour ensuite briser la chaîne (3) de cinq boîtes (à droite). Albert ne prend que trois boîtes (en blanc) et abandonne encore un domino... Finalement, Albert gagnera.



perdra, car son adversaire jouera le dernier coup. Dans notre exemple, le nombre de chaînes est impair et Albert joue le premier : Barnabé bat Albert.

Par ailleurs, l'identité du joueur qui à la main après saturation dépend de la parité du nombre de coups joués auparavant. Quand ce nombre est pair, Albert brise la première chaîne et Barnabé obtient le premier territoire. En revanche, lorsque ce nombre est impair, les rôles sont inversés. Pour gagner, Albert (le premier joueur) doit faire en sorte que le nombre de coups avant d'atteindre la saturation et celui des chaînes après la saturation soient de même parité, alors que Barnabé, qui souhaite aussi gagner, doit espérer que les parités soient différentes. Une étude attentive de la grille, lorsque la saturation est proche, permet souvent d'atteindre un de ces objectifs : cette stratégie est celle de niveau un.

Que faire quand cette stratégie échoue ? Imaginons que malgré ses efforts pour jouer à son avantage, Albert ne puisse empêcher la position du douzième coup de la partie illustrée. Il peut encore gagner en suivant la stratégie de niveau deux. Au treizième coup, il brise la chaîne de deux boîtes. Au coup suivant, Barnabé occupe deux boîtes et brise la chaîne de trois boîtes. Cependant, au quinzième coup, Albert décline l'offre des trois boîtes de cette chaîne : il n'en accepte qu'une seule et trace un segment au bas de la grille qui clôt un rectangle, composé de deux carrés, nommé domino.

Cet abandon de deux boîtes dans une chaîne de trois est un sacrifice. Toutefois, ce sacrifice place Barnabé dans une position fatale. Quant au seizième coup, il brise le domino, il gagne deux boîtes, mais il doit aussi rejouer et ne peut que briser la chaîne de quatre boîtes. Albert ramassera ces quatre boîtes et gagnera par cinq boîtes à quatre. Si Barnabé refuse le domino, les conséquences sont pires : tout autre mouvement brise la chaîne

de quatre boîtes et Albert s'emparera d'elles ainsi que du domino et gagnera alors par sept boîtes à deux.

La cause de Barnabé est perdue dès qu'Albert refuse la chaîne de trois dominos, car il ne reste qu'une seule chaîne sur la grille. Qu'en serait-il avec plusieurs chaînes ? Barnabé ne récupérerait-il pas quelques territoires en usant de la même stratégie ? La réponse est « pas toujours » ! La figure 2 montre une grille carrée de 36 points avec deux dominos et quatre chaînes. Quand Barnabé doit jouer, il peut s'emparer des dominos. S'il refuse, Albert peut à son tour les choisir sans aggraver sa situation. Barnabé brise alors la chaîne la plus courte. Puisque le nombre de chaînes est pair, il peut gagner grâce à la stratégie de niveau zéro décrite plus haut. Cependant, Albert choisit de ne prendre que deux des boîtes de la chaîne de quatre (voir la figure 2), il crée un domino avec la structure restante. Cette tactique oblige Barnabé à s'emparer du domino et à briser la chaîne à cinq boîtes. Albert joue

à son tour et ne prend que trois boîtes des cinq offertes par le coup de Barnabé. Il laisse ainsi un autre domino à Barnabé. Aussi longtemps que les chaînes contiennent au moins cinq boîtes, le sort est favorable à Albert qui contrôle le jeu et gagnera (voir la figure à côté du titre).

Une fois le contrôle de la grille obtenu, on le conserve en refusant les deux dernières boîtes de chaque chaîne (sauf bien sûr pour la dernière chaîne). Cette stratégie de niveau quatre peut se résumer ainsi : Albert fait en sorte que la somme du nombre de points de la grille et celui des longues chaînes (d'au moins trois boîtes) à saturation soit paire ; Barnabé tente de rendre cette somme impaire.

Où en sommes-nous dans les 86 pages de l'ouvrage de E. Berlekamp ? À la page sept seulement ! Le jeu est si complexe qu'aucune stratégie gagnante complète n'est connue. Le mathématicien américain le qualifie d'ailleurs de « jeu d'enfants mathématiquement le plus riche au monde », et de loin !

Réactions

Les réactions à mon article *Paradoxes perdus et retrouvés* (voir *Pour la Science*, août 2000) ne cessent d'affluer. R. Burckel, de l'Université du Kansas, m'a envoyé une lettre à propos du paradoxe de Richard qui utilise la paradoxale définition : « Le plus petit entier positif que l'on ne peut pas définir par une phrase en français de moins de 23 mots. » Un tel nombre doit exister. Pour le trouver, on fait la liste de toutes les phrases d'au plus 22 mots qui définissent un entier unique, puis on détermine le plus petit entier des entiers omis. Toutefois, quel que soit ce nombre, la définition initiale le définit, et elle n'a que 22 mots !

R. Burckel note que ce paradoxe pose un problème, que son créateur, le logicien français Jules Richard, avait remarqué en 1906 : la liste des phrases n'est pas correctement définie. Par exemple, considérons ces deux propositions (j'ai modifié les propositions de R. Burckel et en accepte l'entière responsabilité).

« S'il existe, le nombre indiqué dans la phrase qui suit, et zéro sinon. »

« Le nombre précisé dans la phrase précédente augmenté de un. »

Chaque phrase semble définir un nombre unique ; elles appartiennent donc à la liste. Cependant, si la seconde suit la première, elles sont ensemble contradictoires. La liste n'est donc pas convenablement définie, la phrase de Richard ne définit pas un entier unique et le paradoxe s'évanouit.