

quand il s'agit de traiter de l'infini, il faut prendre des précautions mathématiques, ce qu'a fait Borel.

La mesure de Borel est une extension à des ensembles plus généraux que des segments : elle « mesure » ces ensembles et garde le principe d'additivité mentionné précédemment, c'est-à-dire que la mesure d'une réunion dénombrable d'ensembles disjoints est la somme des mesures de ces ensembles. Cette idée de Borel aidera Lebesgue à définir son intégrale : dans une intégrale, il est deux quantités qui jouent un rôle prépondérant, la mesure de l'intervalle de variation de la fonction et les valeurs de la fonction sur cet « intervalle ».



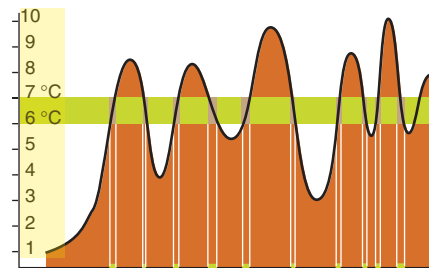
Lejeune Dirichlet

géométrie de l'infini, que les nombres irrationnels « se trouvent en une quantité sans comparaison plus grande que les nombres rationnels ». L'intuition probabiliste nous incite à penser que si l'on prend au hasard un point sur le segment $[0,1]$, sa valeur sera irrationnelle et que la valeur de la fonction considérée sera 0 « en moyenne ».

LES INTÉGRALES DE CAUCHY ET DE RIEMANN

L'intégrale de Riemann (1826-1866) est une généralisation de l'intégrale de Cauchy (1789-1857) publiée en 1823 dans le *Résumé des leçons données à l'École polytechnique sur le calcul infinitésimal*. Le problème initial est de calculer l'aire située sous une courbe définie par une fonction $f(x)$. Cauchy remplace l'aire située sous la courbe de $f(x)$ par la somme des aires de rectangles jointifs. La base de chacun de ces rectangles (un intervalle) est une portion du segment $[a,b]$ et la hauteur est égale à la valeur de la fonction au « début » du segment. Cauchy montre (1) que la valeur de l'aire des rectangles additionnés est égale à celle sous la courbe continue quand la longueur de la plus grande base des rectangles tend vers zéro, et (2) que cette valeur limite ne dépend pas du découpage en rectangles.

Cauchy « montre » plus qu'il ne démontre, car il suppose implicitement que la fonction *est* uniformément continue. Cauchy ne sait pas intégrer des fonctions qui sont discontinues en un nombre infini de points, c'est-à-dire qui bondissent en



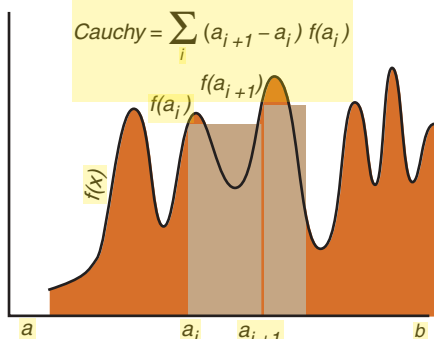
TEMPS PENDANT LEQUEL LA TEMPÉRATURE EST COMPRISE ENTRE 6 °C ET 7 °C

La température à midi durant le mois de février 1998 a varié entre 1 et 10 °C. Cherchons les intervalles de temps où la température est comprise entre 6 et 7 °C. Pour ce faire, nous coupons la courbe des températures par deux parallèles de valeurs 6 et 7 °C et reporterons les valeurs du temps correspondant à cet intervalle de température. La somme des durées pour lesquelles la température est comprise entre ces limites est égale à λ_6 . Puis nous continuerons pour d'autres découpages, de 6 à 7 °C, de 7 à 8 °C et ainsi de suite... La moyenne de la température avec ce découpage sera $1\lambda_1 + \dots + 6\lambda_6 + 7\lambda_7 + \dots + 9\lambda_9$, divisée par la somme des λ_i . Nous pouvons prendre des intervalles de températures de plus en plus petits et finalement, par un passage à la limite, nous retrouvons la définition de l'intégrale de Lebesgue.

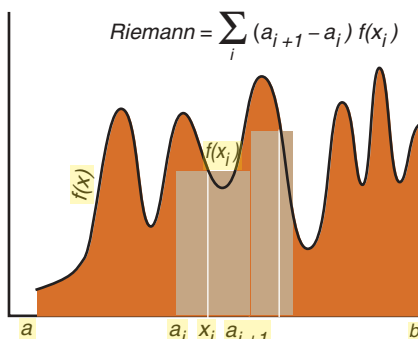
chaque point d'une valeur u à une valeur v .

La définition de l'intégrale par Riemann est une variation subtile de l'intégrale de Cauchy. Riemann prend pour hauteur du rectangle défini sur un intervalle, non plus la valeur du début de l'intervalle, mais une valeur de la fonction quelconque à l'intérieur de chaque intervalle. Quand on fait tendre la valeur maximale des intervalles vers zéro, et que la limite de la somme ne dépend ni du découpage en intervalles ni de la valeur des hauteurs, l'intégrale de Riemann existe. Il est patent que la valeur

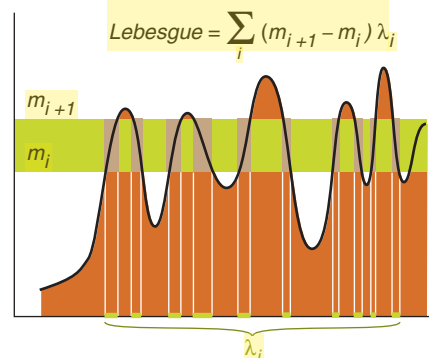
Gaston Darboux



Dans l'intégrale de Cauchy, on prend une succession d'abscisses a_i prises entre les deux points du domaine de définition de la variable, et, à chaque valeur de a_i , on associe la valeur de la fonction $f(a_i)$. La valeur de l'intégrale entre a et b est égale à la somme $\sum (a_{i+1} - a_i) f(a_i)$ quand les longueurs des intervalles $a_{i+1} - a_i$ tendent vers zéro. Dans l'intégrale de Riemann $\sum (a_{i+1} - a_i) f(x_i)$, on prend pour valeur de la



fonction une valeur x_i comprise entre a_i et a_{i+1} . L'intégrale de Lebesgue consiste à découper la fonction en tranches horizontales entre deux valeurs m_i et m_{i+1} , à multiplier la différence par la mesure λ_i de l'intervalle sur l'axe des abscisses correspondant à ces deux valeurs et à sommer toutes les valeurs quand l'intervalle $m_{i+1} - m_i$ tend vers zéro, soit $\sum (m_{i+1} - m_i) \lambda_i$.



des deux intégrales sont égales pour des fonctions continues, mais, avec la définition de Riemann, les mathématiciens savent intégrer des fonctions plus générales incluant par exemple des fonctions qui ont un nombre infini de discontinuités.

Avec l'intégrale de Riemann, on ne sait pas intégrer la fonction de Dirichlet, car sur chaque petit intervalle la fonction f oscille entre 0 et 1 : quel que soit l'intervalle, et aussi petit soit-il, il y a une infinité de valeurs rationnelles de l'abscisse pour lesquelles la valeur de la fonction de Dirichlet vaut 1 et une infinité de valeurs irrationnelles pour lesquelles la valeur de la fonction vaut 0. L'intégrale de Riemann dite «supérieure», selon les définitions de Darboux, est égale à 1 si l'on choisit des valeurs de l'abscisse x_i parmi les rationnels et l'intégrale «inférieure» est égale à 0 si l'on choisit les valeurs de x_i parmi les irrationnels. Or tout segment, aussi petit soit-il, contient une infinité de rationnels et une infinité plus grande encore d'irrationnels : la valeur de l'intégrale de Riemann de la fonction de Dirichlet n'est pas définie.

L'INTÉGRALE DE LEBESGUE

Lebesgue a un point de vue différent : au lieu de découper le segment $[a, b]$ en parties, il découpe en tranches l'intervalle des valeurs de la fonction $f(x)$ et réunit dans un même lot les «intervalles» pour lesquels la fonction est comprise entre deux valeurs. Puis Lebesgue définit deux sommes et quand ces deux sommes ont la même limite (alors que la valeur du plus grand des intervalles de valeur de la fonction tend vers zéro), la fonction f est «intégrable».

Dans sa note, Lebesgue donne un exemple particulièrement simple d'une fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$ et croissante, pour laquelle les deux définitions des intervalles à la Riemann et à la Lebesgue coïncident. Bien évidemment, Lebesgue voulait élargir les ensembles de fonctions qu'il pouvait intégrer par son découpage. L'exemple le plus simple est une fonction de Dirichlet.

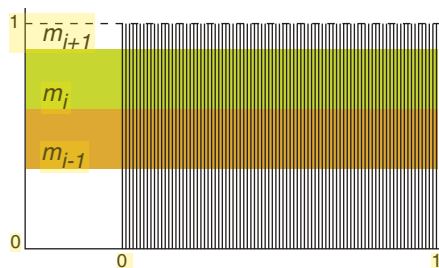


Illustration du calcul de l'intégrale de Lebesgue d'une fonction de Dirichlet qui a pour valeur 1 sur l'ensemble des rationnels du segment $[0, 1]$ et 0 sur les irrationnels du même segment.

L'intégrale de Lebesgue de la fonction de Dirichlet considérée revient à additionner deux valeurs sur des ensembles différents, l'une égale à 1 pour les nombres rationnels sur un ensemble de mesure nulle (donc cette contribution des rationnels est égale à zéro), et l'autre égale à 0 sur l'ensemble des irrationnels dont la mesure est égale à 1, mais cela n'a guère d'importance, car cette contribution est évidemment nulle, la fonction étant nulle en tous ces points. En conclusion, l'intégrale de Lebesgue de la fonction de Dirichlet est nulle. Comme il y a infiniment plus de points d'abscisse irrationnelle (une infinité non dénombrable) sur le segment $[0, 1]$ que de points d'abscisse rationnelle, la valeur nulle de l'intégrale de Lebesgue correspond à ce que les physiciens et les probabilistes entendent par «moyenne».

LEBESGUE ET YOUNG

L'idée de Lebesgue de découper «en tranches» la fonction avait été émise presque simultanément par William Henry Young (1863-1942). Toutefois, comme l'indique Hardy, le développement de la théorie de l'intégration à la Lebesgue est l'œuvre de Lebesgue et nul ne penserait à diminuer sa gloire. Young reconnaîtra l'antériorité et la suprématie des travaux de Lebesgue, et l'expression *l'intégrale de Lebesgue* est sa dénomination : on ne saurait être plus galant.

Henri Lebesgue est né à Beauvais en 1875. Son père, employé dans une imprimerie était un bibliophile et avait accumulé un bon nombre de livres dont le jeune Henri fit son miel. Henri se retrouva orphelin alors qu'il était encore au lycée et il ne put étudier qu'à la faveur de bourses successives jusqu'à son entrée à l'École normale supérieure à l'âge de 19 ans. Il fut maître de conférences à Rennes jusqu'en 1906, chargé de cours puis professeur à l'Université de Poitiers et enfin professeur au Collège de France.

L'esprit critique de Henri Lebesgue se manifesta alors qu'il était étudiant, à propos des surfaces développables, comme le cylindre ou le cône, qui peuvent être aplanies ou «développées» sur un plan.

Dans la géométrie différentielle de l'époque, une surface développable devait avoir des régularités contraignantes, par exemple un plan tangent continu. Lebesgue démontra que ces conditions n'étaient pas nécessaires et pour convaincre ses condisciples de l'École normale, il froissait une feuille de papier de façon à obtenir une surface très irrégulière



René Baire

qui pouvait évidemment être développée sur un plan en enlevant tous les plis puisque la surface initiale de la feuille était plane.

La preuve de Lebesgue, formalisée en 1899 dans *Sur quelques surfaces non réglées applicables sur le plan*, avait scandalisé Darboux.

Les «mandarins» allaient être également interloqués par sa définition de l'intégrale...

LA CLASSIFICATION DES FONCTIONS

Donc Lebesgue savait intégrer des fonctions «sauvages» à la Dirichlet et la question de la définition d'une «fonction» se reposait avec régularité. Lebesgue s'intéressa à la classification des fonctions donnée par René Baire en 1898. Dans la première catégorie de fonctions, selon Baire, étaient les fonctions continues, la classe C_0 . La limite de fonctions continues peut être discontinue, comme ne l'avait pas vu Cauchy. Les fonctions limites, pour chaque valeur de l'abscisse de fonctions continues, étaient classées par Baire dans la classe C_1 . Les fonctions limites des fonctions C_1 faisaient partie de la classe C_2 . Et ainsi de suite... Lebesgue montra l'existence de fonctions appartenant à chaque classe définie par Baire, et montra aussi qu'il existait des fonctions n'appartenant à aucune de ces classes : selon Lebesgue, la classification de Baire n'incluait pas toutes les fonctions de la variable réelle.

La généralité de la classification de Baire fut l'objet d'un conflit avec Lebesgue, qui n'était décidément pas d'un caractère très amène. Quant à Baire, sa neurasthénie en faisait une victime facile. Il se plaignait du fait que ses «idées ne prennent de l'importance que quand Lebesgue... y met le doigt».

PRIMITIVES ET DÉRIVÉES

Au début de sa *Note* Lebesgue traite de la généralisation de l'intégrale de Riemann dans une toute autre direction.

Dans le cas de fonctions continues, il y a identité entre les notions d'intégrale et de fonction primitive. Riemann a défini l'intégrale de certaines fonctions discontinues, mais toutes les fonctions dérivées ne sont pas intégrables, au sens de Riemann. Le problème de la recherche de fonctions «primitives» n'est donc pas résolu par l'intégration et l'on peut désirer une définition de l'intégrale comprenant comme cas particulier celle de Riemann et permettant de résoudre le problème des fonctions primitives.